UN NOMOGRAMA PARA LA CONVERSION DE COEFICIENTES DE FOURIER QUE SE PRESENTAN EN COMPUTOS GEOMAGNETICOS

POR

OTTO SCHNEIDER

En cálculos numéricos para fines geomagnéticos que por su carácter estadístico hacen necesario repetir un gran número de veces una misma operación simple, puede resultar aconsejable el uso de nomogramas. En Ingeniería se ha difundido ya generalmente este cómodo medio auxiliar, en tanto que las ciencias geofísicas, tal vez con excepción de la Meteorología, parecen no haber reconocido las ventajas que ofrece. Desde luego, es preciso en cada caso determinar, si la cantidad de operaciones que en total ha de efectuarse, justifica la labor inicial de planear y preparar el nomograma. Si esta cantidad es apreciable, el pequeño trabajo adicional que consiste en el desarrollo del gráfico, se compensará ampliamente con la ganancia de tiempo en las mismas operaciones.

Un caso en que se creyó justificado el uso de nomogramas, y que se expondrá a continuación, se presentó en oportunidad del tratamiento estadístico de una larga serie de coeficientes armónicos, correspondientes a la variación diurna y semidiurna del geomagnetismo en Batavia. La serie investigada comprendía datos anteriores y posteriores al 1º de enero de 1920, fecha en que los Anuarios de dicho Observatorio comenzaron a publicar los datos ya no en forma de *valores horarios instantáneos* según *tiempo medio local,* sino como *promedios para intervalos horarios* centrados 30 minutos después de cada hora entera, y expresados esta vez en la escala de tiempo del

(*) Véanse los detalles y valores numéricos en la serie: « Observations made at the Royal Magnetic and Meteorological Observatory at Batavia ». El trabajo en que fueron usados los coeficientes transformados, está publicado en « Terr. Magn. », vol. *46,* p. 283-300 (1941).

Un cambio similar en el modo de tabular las observaciones fué introducido en los observatorios geomagnéticos argentinos, donde a partir del 1º de enero de 1932 los valores se consignan según el horario correspondiente al meridiano de 60°, mientras que con anterioridad se trabajaba con la hora local de cada

huso horario correspondiente al meridiano 105° E (*). A fin de hacer comparables los coeficientes de Fourier provenientes del análisis armónico de la segunda serie parcial (posterior a 1920), con los de la primera fracción, se hace entonces necesario efectuar transformaciones de fase y amplitud (ó, representando los coeficientes en forma de un « dial armónico », los vectores deben ser girados y dilatados). Lo primero responde a la diferencia entre la hora local y la del huso horario; lo segundo al efecto de achatamiento de las ondas que se produce cuando un análisis armónico es basado en valores medios por intervalos parciales, en lugar de valores instantáneos (**).

Las transformaciones a aplicarse a los coeficientes de la segunda serie parcial, son pues estas:

Oscilación diaria (A_1, B_1): 1) Aumentar la fase en $5^2/_3°$ (o sea 22 $^2/_3$ minutos de tiempo) ya que la hora media local está adelantada en 7 $^1/_3$ minutos con respecto a la del Meridiano 105°, y el momento de referencia para la primera columna de las tablas del anuario es 1 h 0 min en los años anteriores a 1920, y 0 h 30 min en los años subsiguientes; en el dial armónico, este desfasaje equivale a girar los vectores en un ángulo de 5° 40′ en el sentido contrario al de las agujas de un reloj:

2) Multiplicar las amplitudes, para compensar el efecto de achatamiento, con el factor 1,0029.

Oscilación semi-diaria (A_2, B_2): 1) Aumentar la fase en $11^1/_3°$.

2) Multiplicar las amplitudes por el factor 1,0115.

Los coeficientes transformados se obtienen pues según la fórmula que sigue (limitamos aquí las consideraciones al caso de la oscilación diaria):

$$A_1^* = f_1 (A_1 \cos \varphi + B_1 \operatorname{sen} \varphi) = 0{,}998\, A_1 + 0{,}098\, B_1 \qquad [1\,a]$$

$$B_1^* = f_1 (-A_1 \operatorname{sen} \varphi + B_1 \cos \varphi) = -0{,}098\, A_1 + 0{,}998\, B_1, \qquad [1\,b]$$

siendo $f_1 = 1{,}0029$ el factor de amplitud y $\varphi = 5° 40'$ el ángulo de rotación. Los nomogramas aptos par realizar la operación (1a) y

---

observatorio. Sin embargo, no se modificó en tal oportunidad el temperamento de extractar de los registros fotográficos valores *instantáneos*, a diferencia del método seguido en Batavia, donde se comenzó en 1920 a usar *promedios* horarios.

(**) Véase J. Bartels, en: *Gerlands Beiträge z. Geophysik*, vol. *28*, p.1-10 (1930).

(1b) pueden desarrollarse con las siguientes consideraciones elementales.

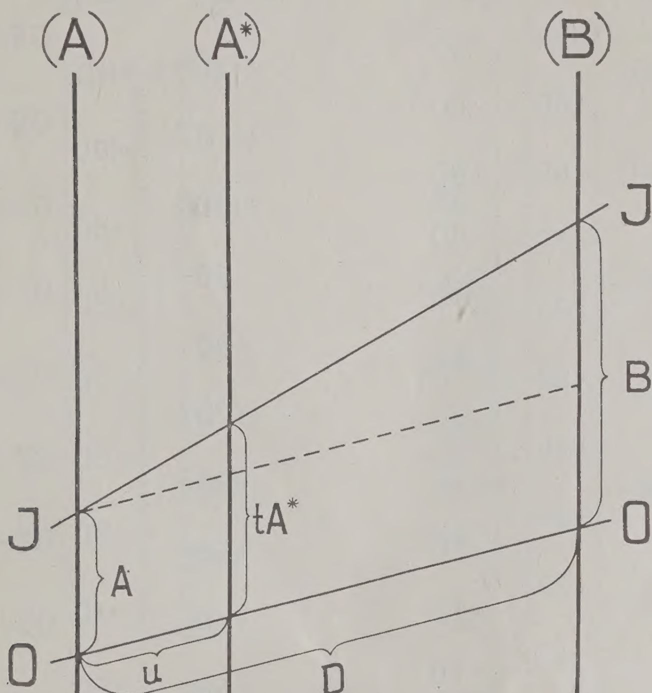


FIG. 1. - Desarrollo de un nomograma para operaciones de la forma $A^*=rA+sB$.

Sean dadas (Fig. 1) tres rectas paralelas (A), (B), (A^*), llevando graduaciones lineales, cuyo intervalo unitario es igual a la unidad de medida (por ejemplo 2 milímetros) en el caso de (A) y (B), e igual a un valor t en el caso de (A^*), de modo que, sobre esta última escala, un punto acotado con un valor A^*, distará del cero en tA^* unidades de medida. Los puntos cero de las tres escalas los suponemos alineados sobre la recta (O, O) sirviendo la misma también para caracterizar, mediante los segmentos u y D, la posición relativa de las tres escalas.

Por comparación de los segmentos A, B y tA^* que corta sobre cada una de las escalas una recta (I, I) uniendo dos puntos A y B, se verifica la relación

$$u/D = (tA^* - A)/(B - A) \qquad [2]$$

$$A^* = A\,(D - u)/tD + Bu/tD \qquad [3]$$

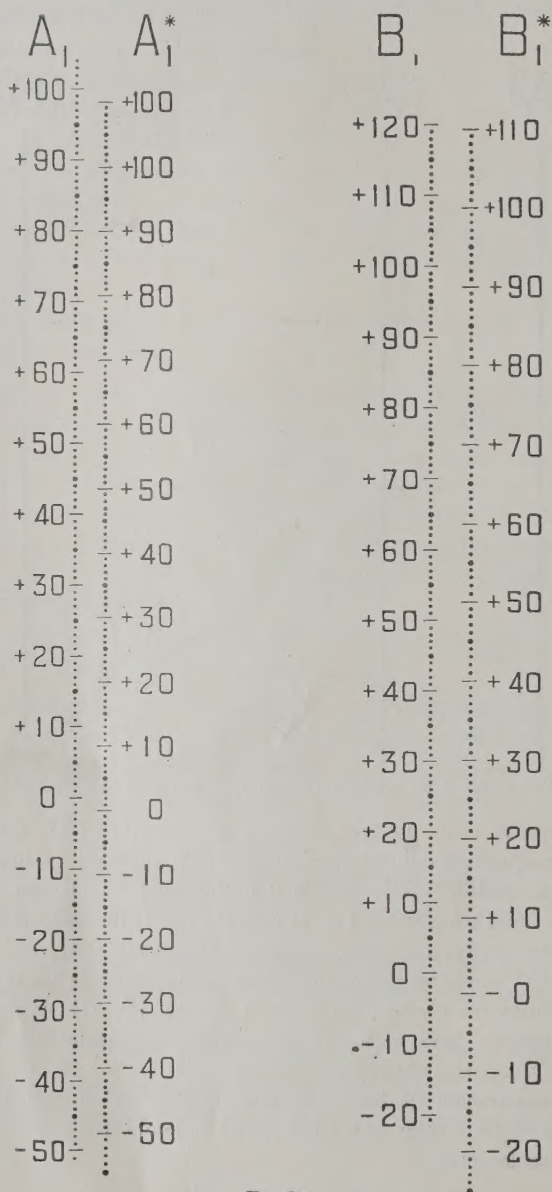

A_1
+100
+90
+80
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
-40
-50
A_1^*
+100
+100
+90
+80
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
-40
-50
B_1
+120
+110
+100
+90
+80
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
B_1^*
+110
+100
+90
+80
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
- 0
-10
-20

Fig. 2 *a*.

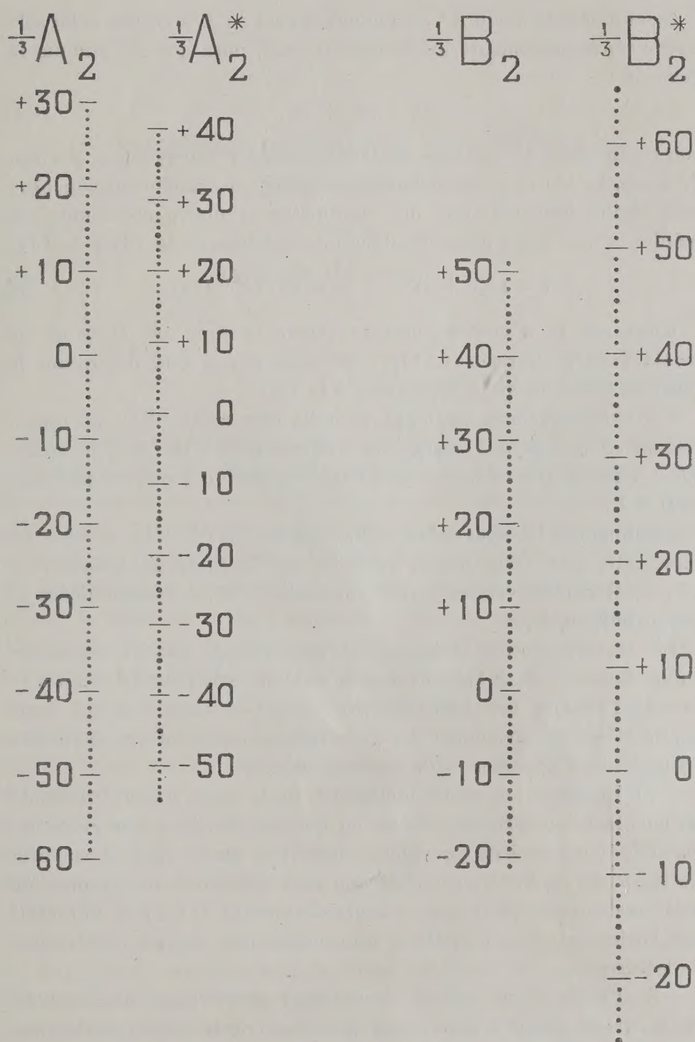


Fig. 2 *b*.

Fig. 2. — Nomogramas para conversión, en fase y amplitud, de coeficientes armónicos de ondas diarias (Fig. 2 *a*) y semidiarias (Fig. 2 *b*). La primera y tercera escala de cada nomograma corresponden a los coeficientes primitivos, las otras dos a los transformados.

Siendo de este modo A^* un binomio lineal en A y B, nos falta sólo elegir convenientemente los valores D, u, t, para que A^* cumpla la relación

$$A^* = rA + sB, \qquad [4]$$

con coeficientes r y s dados. Si identificamos r con $f_1 \cos\varphi$, y s con $f_1 \operatorname{sen}\varphi$, la (4) es precisamente la ecuación de transformación (1a) más arriba indicada, que nos suministra el nuevo coeficiente armónico A^*; se tiene pues, igualando coeficientes en la (3) y la (4):

$$t = 1/(r+s); \qquad u = D \,.\, s/(r+s) \qquad [5]$$

Eligiendo D a conveniencia se puede obtener así el valor de escala t para la recta (A^*), y el segmento u que determina la posición de la misma con respecto a la (A).

Por consideraciones análogas, se halla otra recta (B^*), no reproducida en la figura 1; dados los coeficientes de la (1a), la escala (B^*) viene a situarse más allá de la (B), debido a que en este caso $u/D > 1$.

Combinando lecturas sobre ambas escalas (A) y (B), se tiene de inmediato, para una misma posición de la línea de intersección (I, I), el par de valores transformados A^*, B^*, correspondiente al par primitivo A, B.

En la construcción práctica del nomograma, que se reproduce en la figura 2, fué hallado conveniente observar estos detalles:

1) Trabajar con unidades provisorias de amplitud, tal como las da el análisis armónico. La conversión a unidades cgs se efectúa en una etapa posterior de la investigación.

2) Elegir la posición e inclinación de la línea (O, O), tomando en cuenta la zona de las escalas en que se trabajará con preferencia; ello dependerá de los valores numéricos que tengan la mayoría de los pares A, B. Es evidente que será ventajoso que la posición más frecuente ocupada por la regla de lectura (I, I) se aproxime a la horizontal, a fin de reducir a un mínimo los errores paralácticos de lectura.

3) Por la misma razón, se cree conveniente usar como escalas, en lugar de simples rectas con pequeñas rayas transversales que marcan las divisiones, puntos equidistantes sueltos, tal como lo representa la figura 2.

4) Distinguir por el color el par de escalas (A), (B) (coeficientes primitivos), de las (A^*), (B^*), (coeficientes transformados).

SECCION CONFERENCIAS

LA HIPOTESIS CIENTIFICA Y LA HIPOTESIS METAFISICA

POR EL

DR. HANS A. LINDEMANN

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 7 de junio de 1946.

En nuestra conferencia anterior nos hemos ocupado con los dos ramos de la filosofía, la filosofía teórica, y la filosofía práctica y de los esfuerzos de los grandes filósofos de unir los dos ramos en una sola teoría. También nos damos cuenta, la última vez, de que los así llamados filósofos existencialistas de hoy que tratan de llegar al fondo del ser o, como dicen, a una ontología fundamental mediante la intuición están usando el método de la producción artística para elaborar el fondo metafísico del «ser»; pero que estas creaciones «filosóficas» no son otra cosa que poesías conceptualistas, o mejor dicho, poesías malogradas, pues están usando antiguos conceptos escolásticos para disfrazar las intuiciones subjetivas del filósofo y nos dan de esta manera obras sofisticadas de una filosofía ecléctica literaria. Los existencialistas forman, empero, solo una pequeña escuela que ya está perdiendo terreno. Los nuevos filósofos sistemáticos que tienen inclinaciones metafísicas están usando el viejo camino de la construcción metafísica como lo hizo por ejemplo A. N. Whitehead y otros pensadores parecidos. Estos pensadores metafísicos razonan generalmente en la forma siguiente: La ciencia de hoy, dicen, especialmente la física moderna, no puede prescindir de la hipótesis y de la construcción teórica. Todo el edificio imponente de la física moderna está basado sobre puras construcciones que en el fondo representan, así dicen, también hipótesis metafísicas, pues ningún hombre jamás ha visto directamente las entidades que elabora la física cuántica. Agregan que nosotros, los metafísicos, siempre lo hemos sabido, pues el hombre es en primer

lugar un ser que hace metafísica; mientras que respire seguirá haciendo construcciones arbitrarias y metafísicas. Si el hombre no hubiera hecho metafísica no habría tampoco progresado; pues la fantasía misma a veces nos revela algún concepto metafísico que recién en los tiempos posteriores encuentra una aplicación en nuestro sistema científico. Dicen: Comprendemos muy bien que ustedes, los filósofos científicos, se oponen a los filósofos existencialistas y los llaman poetas malogrados. Nosotros tampoco somos amigos de ellos, no nos parecen serios, pues somos de opinión, como se debiera saber desde hace tiempo, que por la intuición solo no se consigue ningún saber seguro ni en las ciencias ni en la filosofía, sino se trata de elaborar las visiones metafísicas conforme a las enseñanzas y a los resultados de las ciencias. Mediante la intuición el poeta solo puede dar expresión a su vida más íntima en forma directa por el lenguaje poético y simbólico, la metafísica filosófica, empero, procede conforme a la ciencia, construye sus conceptos metafísicos conforme a la práctica científica para que sirvan como eslabones entre los resultados comprobados de las ciencias y de los credos éticos y religiosos y unirlos mediante la teoría metafísica en base de una hipótesis conveniente. Por eso nuestro procedimiento es legal y auténtico, y no entendemos como los filósofos científicos se oponen constantemente a nuestra manera de filosofar, parece que no tienen fantasía ni inspiración como todos los positivistas. No cabe duda de que efectivamente los grandes filósofos del pasado han procedido en la forma recién indicada. Para darnos cuenta de esto contemplemos un momento el sistema metafísico de Leibniz que representa un ejemplo auténtico de construcción metafísica conforme a los resultados de las ciencias de la época en que fué construído. Por eso mismo el sistema de Leibniz ha sido estudiado mucho por pensadores exactos en nuestra época, especialmente por Bertrand Russell, L. Couturat y A. N. Whitehead. Este último pensador aún lo tomó hasta cierto punto de modelo para sus propias construcciones metafísicas como veremos más tarde.

La metafísica de Leibniz representa una construcción muy genial, es una síntesis de los rasgos más importantes de la filosofía medioeval con todos los adelantos en las ciencias de su tiempo a las que Leibniz había contribuído también en alto grado. El rasgo más característico de la metafísica leibniziana es su fusión de la concepción mecánica del mundo con la antigua concepción teleo-

lógica medioeval. Representa en otras palabras la fusión de la concepción científica con la concepción regiliosa cristiana del mundo en sus ragos principales. Contra la concepción dualista de Descartes que separó las dos sustancias fundamentales « extenso » y « cogitatio » o « materia » y « espíritu » por un abismo infranqueable, Leibniz pone su única sustancia fundamental del Universo la « Fuerza espiritual ». Esta « fuerza » no ocupa espacio y está concentrada en las « mónadas » o entidades espirituales; no obstante, representan la esencia de los fenómenos materiales. La materia y los objetos reciben su carácter de llenar el espacio y de moverse únicamente de la fuerza espiritual de las mónadas cuyas emanaciones se concentran en lo que llamamos « materia ». La fuerza metafísica original concentrada en monedas individuales es la esencia de todo el ser del Cosmos. El razonamiento claro y preciso reconoce la materia y todo el « ser » como fuerza espiritual mientras que la concepción oscura de los sentidos siente a la fuerza como materia. Por eso, el cuerpo es el producto de la sustancia única de la fuerza metafísica espiritual dividida en mónadas individuales. Espacio y tiempo representan solo la ordenación de la coexistencia de las fuerzas metafísicas o entidades mentales que nuestros vagos sentidos sienten como materia. Por eso mismo las leyes mecánicas elaboradas por nosotros son solo leyes contingentes, no son de ninguna manera necesarias porque pudieran ser también otras si así hubiera sido la voluntad de Dios de establecerlas.

Los cuerpos, empero, son máquinas formadas por Dios para que cumplan el fin premeditado por El. Cada mónada espiritual es absolutamente independiente de la otra y no tiene « ventanas », esto es ninguna mónada recibe impresiones de afuera ni de las demás mónadas sino produce todo el mundo exterior e interior mediante su fuerza creadora desde su propio interior. El mundo está proyectado desde el centro de la mónada hasta afuera como la luz de una lámpara proyectora que sale de noche de su foco hacia el espacio infinito. Por eso cada mónada contiene en sí mismo todo el Universo como representación, pero no existen dos mónadas iguales en el mundo y la diferencia de la concepción del mundo entre diferentes mónadas tiene su razón en los grados de claridad y precisión con que ellas conceptúan el mundo. Cuando la mónada solo tiene representaciones oscuras y vagas entonces es pasiva como las mónadas de la materia, mientras que la mónada activa, espe-

cialmente la de los hombres y organismos empuja a los seres vivientes a buscar la claridad. Conseguir claridad es, por eso, el supremo fin de las mónadas centrales activas de la vida orgánica. Como creador del cálculo infinitesimal Leibniz aplica su principio diferencial e integral a las representaciones de la mónada que reciben muchos impulsos infinitesimales las « petites perceptions » que no llegan hasta la conciencia, porque la mónada tiene mucho más percepciones que las que siente concientemente.

La mónada más alta, la mónada central, es Dios que tiene las percepciones y las representaciones absolutamente claras y precisas. Entre los dos extremos de claridad hay una infinidad de estados intermedios. Para explicar que a pesar de la absoluta individualidad de las mónadas cada una ve el mundo más o menos en forma parecida, Leibniz construye su famosa armonía preestablecida de las mónadas. Dice que la mónada central, Dios, ha creado las mónadas individuales de tal manera que todas sus vidas se desarrollan en forma parecida, sólo su posición y la intensidad de la percepción y de la representación es diferente en ellas. Por eso en la naturaleza todo sigue a las leyes mecánicas determinadas por Dios que nosotros estamos elaborando, pero a pesar de este mecanismo aparente todo el desarrollo cósmico sigue al mismo tiempo a los fines preestablecidos por Dios, el Creador y Espíritu Universal. Sólo el Ser eterno, Dios, representa la absoluta necesidad lógica. La lógica ontológica de Leibniz que da el fundamento a la metafísica está reglada por el axioma de la contradicción. Este axioma tiene existencia metafísica absoluta. Dios está también sometido a las reglas lógicas, no puede pensar y actuar contra la lógica, en todo lo demás es libre como sujeto absoluto. Todo lo que además existe es contingente y existe solo según el principio de la causa suficiente y eficiente. El mundo podría ser muy diferente del nuestro, pero siendo así como es, solo se debe a la selección de Dios que ha escogido este nuestro mundo real entre todos los diferentes mundos posibles y Leibniz demuestra en su famosa Theodicea, que a pesar de los sufrimientos de los seres humanos, este mundo es el mundo relativamente mejor que pueda haber. Dios en su bondad eterna ha escogido entre todas las posibilidades de construir el mundo, la posibilidad más favorable. Con el material de que disponía no se podía hacer nada mejor. Es sabido como Voltaire y otros contemporáneos de Leibniz se burlaron de este « mejor de los mundos

posibles », en la novela « Candide », Voltaire da riendas sueltas a su ironía, burlándose de este nuestro « mejor mundo posible ». No cabe duda de que la construcción metafísica de Leibniz, cuyos rasgos principales solo he podido exponer y con cuyo fondo puramente lógico nos ocuparemos todavía en otra ocasión, presenta una construcción genial y muy audaz. En su sistema se une la lógica aristotélica, el nuevo cálculo infinitesimal, la mecánica de Newton, restos de la concepción metafísica del mundo medioeval y consideraciones lógicas nuevas para formar un sistema coherente. Es claro que Leibniz debe mucho a sus predecesores, especialmente a Spinoza y a Descartes, así como a Hobbes y otros. En su sistema entra la nueva física de su tiempo, lo mismo que la religión cristiana y la nueva matemática enriquecida por sus propios inventos y por Descartes. Se podría decir ahora que la hipótesis de la mónada de Leibniz es en el fondo una construcción no más arriesgada que la construcción del átomo moderno, aún uno podría decir tal vez que el átomo moderno que, como la mónada, tampoco nadie ha visto directamente, es todavía mucho más complicado y más efímero que ésta; no puede ser representado por ningún modelo, pues los electrones del átomo no son ni siquiera siempre partículas sino también las describimos como ondas que se mueven en el espacio einsteineriano de *n* dimensiones y la mecánica ondulatoria que describe hoy las transformaciones del átomo usa aún la estadística en sus fórmulas sumamente complicadas para describir los movimientos de esas entidades hipotéticas. Por eso mismo no vemos, así podrían decir ustedes, que haya una diferencia apreciable entre la construcción hipotética física y la construcción metafísica, pues ambos son construcciones conceptuales, solo que nos podemos hacer una idea mucho más clara de las mónadas de Leibniz, de estos átomos espirituales que tienen semejanza con nuestro espíritu que sentimos íntimamente, mientras que el átomo moderno ni siquiera puede ser representado por un modelo y representa una entidad matemática de ecuaciones de Dirac de ondas de probabilidad, etc. El átomo moderno en otras palabras ni siquiera puede ser descrito por nuestro idioma sino solo mediante el idioma matemático que solo entienden algunos iniciados. Contra esto queremos decir solo lo siguiente: Efectivamente el átomo moderno es mucho más complicado que la mónada de Leibniz. Esto se debe en primer lugar al hecho de que el átomo del tiempo de Leibniz y Newton recién

había sido despertado de su sueño metafísico desde los tiempos de Demócritos, su primer inventor. Por eso, un filósofo metafísico de hoy ya no puede usar tampoco, así nomás, la mónada de Leibniz; tiene que recurrir a una construcción mucho más complicada. Esto se ve claramente cuando contemplamos ahora un momento los rasgos más importantes de la metafísica de A. N. Whitehead, a quien ya mencionamos, que modernizó justamente la metafísica de Leibniz, modificándola en muchos sentidos, adaptándola también a las enseñanzas de la lógica moderna y de la nueva física.

Como la base de la nueva física es el « acontecimiento psicofísico » sentido por alguna persona y reproducible en cualquier momento por cada hombre « normal », Whitehead tenía que tomar como elemento de su metafísica la « ocasión actual de experiencia », así dice textualmente en su libro: « Science and the modern World » (pág. 196). Esta « ocasión actual » está « diversificada referente a un universo de entidades que la trascienden en tal sentido en que tienen conexiones análogas o diferentes con otras ocasiones de experiencia ». Con esta frase algo oscura Whitehead quiere sugerir que cada experiencia del hombre puede formar una entidad diferente según el universo de conexiones y coordinaciones en que entra. Por ejemplo una mancha roja puede ser considerada sólo como un acontecimiento físico y descrita por las ecuaciones de la física, pero también puede ser una mancha en un cuadro y formar un elemento en un cuadro artístico que tiene una dimensión absolutamente diferente y que solo tiene significado en consideraciones artísticas, esto es, en consideraciones de valores ideales. Según Whitehead estos dos universos son « inherentes en la situación total de la metafísica ».

Ahora bien, las « entidades conceptuales » trascienden la ocasión inmediata sentida por el hombre, pues son los antiguos conceptos universales o las ideas de Platón; Whitehead prefiere llamarlos « objetos eternos ». Estos « objetos eternos » son abstractos en su esencia y « comprensibles sin referencia a alguna ocasión particular de experiencia ». Con esto Whitehead parece llegar a cierto realismo idiomático en el sentido medioeval. Pero más tarde dice expresamente que a pesar de que lo « abstracto » trasciende cada ocasión concreta del acontecimiento, solo lo comprendemos junto con la ocasión particular y en su relatividad y parentesco con otros « objetos eternos ». Esto significa que su sentido sólo nos revela todo

un universo de discurso de un idioma definido. Sigue diciendo que tenemos que conocer el principio general que domina el modo de participación de una definida ocasión en el « objeto eterno ». Estas últimas consideraciones están conforme a las enseñanzas de la lógica moderna. Se ve como se complica hoy una metafísica construída « ad hoc ». No puedo exponer aquí todos los demás rasgos de la metafísica de Whitehead, pues no nos alcanzaría el tiempo. Tampoco me parece necesario, pues solo quería dar una idea de las complicaciones enormes que un filósofo moderno encuentra si quiere construir una metafísica que une las entidades reveladas por el análisis epistemológico en base de la lógica moderna y de la nueva física con las experiencias de un mundo artístico, ético y religioso de la tradición. En su libro principal « Process and Reality », uno de los libros más difíciles y más complicados de la historia de la filosofía, la construcción de Whitehead llega al fin a la concepción de un Dios que tiene rasgos aristotélicos y leibnizianos. El Dios de Aristóteles como « primer Movedor » está reemplazado por el Dios como principio de Concreción o Realización. Hay que saber que cada « ocasión actual » representa una limitación impuesta a las posibilidades de realización que tiene Dios. Todos los fenómenos de nuestro mundo, incluso los fenómenos valorativos salen por eso a la luz, conforme a los diferentes principios de concreción que Dios impone a las cosas. Pero resulta que cada « ocasión actual » como unidad básica, representa en verdad un proceso, un devenir perpetuo individual. Al lado de este devenir individual, Whitehead distingue la « actividad general de la sustancia metafísica y única del mundo », que es la misma sustancia infinita de Spinoza o Dios. La última limitación que se impone a las actuales ocasiones es impuesta por Dios, su existencia es « la última irracionalidad » según Whitehead, pues no existen razones que se puede dar porque El haya limitado las posibilidades del mundo en la forma en que el mundo existe hoy. Esto es parecido a la posición de Leibniz. Por eso mismo Whitehead dice al final: Dios no es concreto, pero El representa la razón de que haya actualidad concreta. La naturaleza de Dios es por eso el fondo de la racionalidad del mundo. Los nombres que se hayan dado a Dios: Jehovah, Allah, Brahma, Orden del Cielo, Causa Primera o Ser Supremo, etc., todos estos nombres, así dice, corresponden a diferentes sistemas de pensamientos emanados de las experiencias de los que usaron los nombres respectivos.

Bastarán estos pormenores para caracterizar los rasgos más importantes de la metafísica de Whitehead. Esta forma de razonamiento metafísico seguramente es más moderna pero, no obstante, tiene el mismo carácter metódico que el de Leibniz. Si ustedes no comprenden bien este sistema, cuyos rasgos más sobresalientes he tratado de exponer, no es de admirar, al contrario, quiero citarles unas palabras del conocido escritor y sociólogo norteamericano Walter Lippmann, que escribe a menudo en « La Prensa » y en « La Nación », sobre la política mundial. Lippmann dice en su libro: « A Preface to Morals », (pág. 26) : « Hay un Dios en la filosofía del Sr. Whitehead y es un Dios muy necesario. Desgraciadamente no soy suficientemente versado en Lógica para decir que entiendo lo que quiere decir que « Dios no es concreto, pero que El es el origen de la actualidad concreta ». Había momentos cuando imaginaba que entendiera el sentido de la frase, pero había más momentos en los que supe que no lo comprendía. Nunca dudaba, empero, que el concepto tiene sentido, que sólo no lo comprendía porque su sentido era demasiado profundo para mí ». Más tarde, dice Lippmann, que este Dios puede satisfacer a una cabeza lógica metafísica, pero seguramente no satisface a los fervores de un hombre religioso creyente. Se ve que Lippmann se burla del Dios de Whitehead tanto como Voltaire se burló del mejor de los mundos posibles de Leibniz; y con razón, pues estas construcciones metafísicas igualan demasiado a los castillos de naipes que se derrumban al menor soplo, dejando sólo rastros en la historia de la filosofía y en los comentarios de profesores y estudiantes que tienen que investigar estos sistemas. Se ve que estas construcciones representan siempre entidades hipotéticas « ad hoc » que por eso no dan las informaciones sobre el « verdadero ser » o la « sustancia » cósmica o el principio básico del mundo que pretenden darnos sino representan una especie de interpretación media poética, media científica del mundo, pero no son poesía ni ciencia sino una especie de mezcla de ambos, que consideramos perniciosa, pues favorece nuevamente la vaguedad en los conceptos y en las expresiones, que es más fatal que el error mismo. A pesar de la indudable belleza de algunas metafísicas hay que decir que la humanidad ha sido engañada muchas veces por teorías metafísicas. Por eso es de suma importancia estudiar y analizar los conceptos metafísicos en general y definir su alcance.

La hipótesis científica que analizaremos ahora para diferenciarla de la hipótesis metafísica tiene otro carácter. Primero vamos a darnos cuenta de lo que es lógicamente una ley. El gran analizador francés de la física, Pierre Duhem, define una ley física en la forma siguiente: La Ley física es una relación simbólica de implicación cuya aplicación a la realidad concreta exige que se conozca y se acepte todo un conjunto de teorías ». Dice por ej., que la simple ley de Boyle-Mariotte, de que « dado una temperatura constante, una cantidad de gas ocupa diferentes volúmenes bajo diferentes presiones y la presión variará en el sentido inverso del volumen », ya presupone una cantidad de conceptos abstractos que han sido elaborados poco a poco por la ciencia. Los conceptos « temperatura », « cantidad », « volumen », « presión », son conceptos basados sobre instrumentos con escalas, como el termómetro que presupone el manejo de aparatos científicos y la aplicación de otras teorías físicas. Todos esos manejos de aparatos y teorías sólo pueden hacerse por gente entendida e iniciada. Como se trata en ciencias siempre de abstracciones, medidas, interpretación de valores de escalas y aplicación de fórmulas definidas, la relación de la ley con la realidad solo puede ser aproximativa porque la ley expresa siempre relaciones entre condiciones ideales abstraídas de la realidad que nunca están realizadas completamente en la empirie. Estas condiciones se complican aún enormemente cuando se trata de formar una o varias nuevas hipótesis sobre las que se basa una teoría física que describe y explica un gran sector de los fenómenos naturales.

Contemplemos por ej., un momento las famosas leyes electrodinámicas de Maxwell y Hertz. La base de esa teoría electro-magnética es el concepto del « campo físico ». Es sabido que Newton en su mecánica celeste operaba todavía con la fuerza gravital como fuerza que se hace sentir directamente a cualquiera distancia. Contra esta concepción ya Faraday había desarrollado su concepción del efecto inmediato por intermedio de un medio especial, el éter. Este éter es en adelante también el portador del campo electromagnético. El campo físico en general significa un estado real en el espacio y a Maxwell fué posible formular los dos grupos básicos de fórmulas cada uno de tres ecuaciones que describen todo el movimiento en este campo electro-magnético que se desplaza en el espacio con la velocidad de la luz. Como el campo electro-magnético

tiene en esta teoría una existencia real, según acabamos de exponer, se creía lo mismo del éter hipotético como portador de las ondas electro-magnéticas. De esto resultó que en adelante los físicos llegaron a las siguientes conclusiones: Dijeron si el éter es el portador de las ondas electro-magnéticas a las que pertenecen, como es sabido, también las ondas de luz, entonces no comprendemos que la velocidad de la luz cuando la medimos aquí en la tierra nos dé siempre el mismo valor, pues la tierra se mueve con 30 kilómetros de velocidad por segundo alrededor del sol. Debiéramos conseguir diferentes velocidades según nos acercamos o nos alejamos del sol. Además, si efectivamente existiera el éter cósmico, entonces tendríamos un medio fijo que nos permitiera determinar la velocidad absoluta de la tierra en el cosmos, así como el tiempo absoluto en el Universo. Es sabido como el gran físico holandés, Lorentz, quería solucionar este problema mediante una teoría « ad hoc » de contracción de los aparatos de medir, conforme al movimiento de la tierra. Pero esas teorías « ad hoc » nunca dan una solución definitiva. Por eso Einstein se resolvió de eliminar en lo posible los elementos hipotéticos, especialmente el éter cósmico. Razonó más o menos en la forma siguiente: Si la velocidad de la luz da siempre el mismo valor, sea que la medimos desde cualquier sistema de coordenadas en movimiento relativo, entonces esta velocidad la voy a considerar en adelante como una constante cósmica y formular en base de este valor una nueva definición de la simultaneidad de dos acontecimientos. Sobre esta nueva definición y convención, Einstein desarrolló entonces lógicamente su teoría de relatividad restringida, ampliándola más tarde por la relatividad general. Esta teoría de Einstein jamás hubiera conseguido fama mundial, empero, si no hubiera explicado algunos fenómenos que la antigua teoría de Newton no había conseguido explicar. Por eso, una teoría científica construída en base de una hipótesis científica sólo tiene valor cuando los resultados de la aplicación de la teoría a la realidad pueden ser verificados. Entonces la teoría se verifica y nos permite pronosticar acontecimientos futuros y transformar con la ayuda de la teoría científica nuestro ambiente.

Creo que basta este ejemplo, que no puedo seguir en forma más detallada, para demostrar que los elementos hipotéticos, aunque necesarios para cualquiera teoría son siempre inseguros y muchas veces serán eliminados más tarde o reemplazados por otros. Hoy en

día sabemos que la manera de construir modelos ideales en la física como acostumbraron hacer especialmente los investigadores ingleses con tanto éxito, a veces nos da resultados estupendos, pero que generalmente más tarde hay que eliminar parte del modelo y aún todo el modelo reemplazándolo por puras fórmulas y ecuaciones matemáticas. Porque el modelo está siempre basado sobre la intuición ordinaria. Muy bien se ve esto en la construcción del átomo moderno. El modelo del átomo cambió constantemente, el último modelo sumamente genial era el de Niels Bohr, pero tampoco pudo resistir a la investigación que siguió su camino adelante y hoy en día el átomo sólo puede ser descrito por la mecánica ondulatoria incluso la teoría de la relatividad que está operando, como ya insinuamos, con espacios de *n* dimensiones y el aspecto complementario de las últimas partículas del átomo. Es interesante y revelador, también cómo se trata el problema de la inducción y de la hipótesis científica en los libros de la lógica moderna. En su libro « Foundations of Logic and Mathemetics », R. Carnap, por ej., llega al final del libro, donde se ocupa con la estructura de las teorías físicas, al resultado de que en una teoría física la hipótesis puede ser representada mediante un cálculo lógico que « flota en el aire », esto es: la construcción puede empezar con la hipótesis en base de los fenómenos que hay que explicar y poco a poco se puede interponer niveles más bajos, anclando el último nivel firmemente en la realidad revelada por el experimento. Sólo los resultados finales del cálculo de una teoría aplicada pueden ser verificados, no las partes hipotéticas y teóricas. Por eso mismo podemos decir ahora que la hipótesis científica solo tiene valor y sirve a los fines de la investigación cuando entra como elemento en un vasto razonamiento teórico en base del experimento. La hipótesis científica en otras palabras representa un eslabón indispensable en la investigación y solo sirve cuando con la ayuda de esta hipótesis se consigue al final resultados palpables, esto es, cuando mediante la hipótesis y la teoría se puede pronosticar acontecimientos futuros como ya hemos dicho. La hipótesis científica es por eso mismo uno de los instrumentos más importantes para la investigación. Sin la hipótesis no podemos adelantar ningún paso, pero al mismo tiempo tenemos que estar preparados en cada momento de eliminar una parte de cualquier hipótesis o toda la hipótesis y construir una nueva, según el estado

general de la investigación experimental y según el dominio teórico que hemos alcanzado de un pran sector de los fenómenos naturales.

En vista de estos resultados de nuestra investigación, creo que nos damos perfectamente cuenta de la diferencia que existe entre una hipótesis metafísica y una hipótesis científica. La primera no representa más que una construcción más o menos fantástica que sólo sirve para satisfacer a un hombre con gran imaginación para completar los resultados de la investigación científica y armonizarlos con sentimientos individuales y los valores heredados de los antepasados, mientras que el filósofo que renuncia de antemano a la construcción metafísica busca una concepción del mundo en base de los resultados de la ciencia a pesar de que estos resultados exigen la adaptación del hombre a las nuevas enseñanzas que las ciencias nos dén. El filósofo antimetafísico cree que solo se puede conseguir una concepción adecuada del mundo actual que evita los prejuicios y los elementos tradicionales caducos, sin las hipótesis metafísicas que solo representan construcciones « ad hoc » para conservar credos antiguos que son sospechosos. Con razón dijo una vez el matemático vienés H. Hahn en una conferencia que mientras que la hipótesis científica se parece a un cheque bancario con fondos en el banco que puede ser realizado en cualquier momento en efctivo, la hipótesis metafísica se parece más bien a un cheque *sin* fondos que jamás puede ser realizado. Este cheque « metafísico », podemos agregar, generalmente está bien dibujado y pintado con muchos colores, así que parece más bien a los diplomas de honor que acostumbramos entregar a hombres de actuación destacada al final de su vida, que se pone bajo marco y se lo cuelga en la pared del salón de la casa como adorno, mientras que la hipótesis científica tiene un valor efectivo que se puede realizar, tiene fondos reales con los que se puede transformar el ambiente, pues en base de una teoría científica podemos explorar la naturaleza y obligarla a darnos materiales y fuerzas incalculables que pueden hacer nuestro mundo más habitable y más seguro para la humanidad, mientras que desgraciadamente las hipótesis metafísicas muchísimas veces han sido usadas en la historia del pensamiento humano para conservar y aún crear prejuicios, forjar creencias y odios que han destruído toda una civilización y han llevado la desgracia a todas partes. Por eso, la hipótesis metafísica tiene su justificación sólo en la creación artística, pues en el arte sabemos que se trata

de una libre fantasía, a veces de gran belleza, para dar expresión a nuestros anhelos o a nuestras pasiones. Pero es necesario separar bien estos dos mundos, el mundo del arte y el mundo científico y filosófico, pues todos nuestros males vienen de la mezcla indebida de esferas de cultura y de la vaguedad y falta de claridad en la vida y en el mundo sentimental de las pasiones. Es mi firme convicción que he mantenido toda mi vida y que también B. Russell expresa en su último libro diciendo que « moralmente un filósofo que está usando su competencia profesional para cualquiera otra cosa que la búsqueda desinteresada de la verdad es culpable de una especie de traición » y cuando se ahoga la búsqueda de la verdad por la fuerza la « filosofía está paralizada por el miedo y el terreno está preparado para el dominio de la censura gubernamental que castiga a los que pronuncian « pensamientos peligrosos ».

Por eso solo una disciplina filosófica severa y racional que conoce todas las exigencias de la vida, las toma en cuenta y trata de analizarlas, sublimarlas y limpiarlas de vaguedades y prejuicios, puede crear un estado más alto de cultura y curarnos de los terribles males de nuestro tiempo. Pues esta manera de filosofar trata los problemas filosóficos en la misma forma como lo hacen las diversas disciplinas científicas. Por eso es de esperar que poco a poco consigan resultados parecidos, solucionando en fin también, en forma positiva, los antiguos problemas filosóficos y sociales que tanto han inquietado a nuestros antepasados, ocasionando la desorientación y el malestar general.

LEIBNIZ Y LA LOGICA MODERNA

POR EL

Dr. HANS A. LINDEMANN

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 18 de junio de 1946.

Godefredo Guillermo Leibniz que nació en Leipzig (Sajonia) en el año 1646, hijo de un jurisconsulto y profesor de la Universidad de aquella ciudad, y cuyo tercer centenario de nacimiento conmemoramos esta noche, era uno de los grandes genios de la humanidad.

Generalmente se considera a Leibniz como el filósofo europeo en que culminó el movimiento filosófico entre Descartes y Kant; pero la actuación de Leibniz va mucho más lejos y se refiere a casi todos los ramos de la vida intelectual y científica de su época. Fué un genio enciclopédico en el buen sentido de la palabra que reunía en sí el espíritu crítico filosófico, gran facultad matemática junto a la curiosidad para los hechos empíricos del Universo y de la vida humana. Con esta vasta dotación unía Leibniz grandes facultades diplomáticas y modales muy refinados para lucir en la vida social de los príncipes y reyes del mundo europeo del siglo XVII.

Estos rasgos positivos de su personalidad implicaban ciertos rasgos negativos como consecuencia natural. Se comprende fácilmente que un personaje de tal naturaleza y actuación en el mundo europeo tenga tantas actividades mundanas que le falta muchas veces el tiempo para elaborar todas las ideas que su genio descubre y proyecta. Por eso, una parte importante de su obra quedó enterrada en papeles sueltos y cartas a amigos y otros hombres destacados del siglo. Otro rasgo de su actuación consiste en que su espíritu diplomático y su amistad con los grandes príncipes de aquella época feudal del reinado absolutista, a veces impedía el desarrollo

de ideas audaces que concibió y que pudieran chocar al ambiente señorial en que se movía Leibniz. Esto último parece que sucedió con una parte importantísima de su gran obra de renovación lógica, lo que habría resultado fatal para la ideología corriente de su tiempo, si hubiera desarrollado más sus ideas. Por eso, esta obra quedó más bien estancada y escondida entre los papeles de su escritorio. Se puede decir, como veremos todavía, que encontramos en la obra de Leibniz varias ideas cuyo valor todavía hoy después de más de doscientos años queda en pie sin haber podido ser realizadas. Es una característica de la manera de producir de Leibniz que seguía constantemente a insinuaciones y estímulos de afuera que le llegaban por cartas y memorándums de sus amigos y corresponsales. Por eso, sus ideas más reveladoras y sus papeles más importantes recién fueron encontrados después de su muerte y quedaron en los archivos del gobierno de Hannover, lugar donde Leibniz murió. Solo se publicaron en parte habiendo sido escogidos más bien aquellos tratados y cartas de sus escritos que fundaron o ampliaron su sistema metafísico, la Monadología. Recién al fin del siglo pasado Bertrand Russell, que estudiaba más de cerca la obra hasta entonces publicada de Leibniz, se dió cuenta de que detrás de la lógica aristotélica que formaba el fundamento de la Monadología existe una lógica mucho más profunda y moderna de la que hasta entonces nadie se había dado cuenta, como demuestra Russell en su libro sobre Leibniz del año 1900. Un año más tarde, empero, salió el libro clásico de la Lógica de Leibniz, escrito por el fino matemático y lógico francés, Louis Couturat, «La Logique de Leibniz», que desgraciadamente murió en la primera guerra mundial. Couturat con la ayuda de la Academia de París se había trasladado a Hannover y estudió todo el archivo de Leibniz encontrando muy valiosos escritos que recién nos revelaron todo el alcance de las ideas lógicas del pensador que —como sabemos ahora— forman también el centro de todos sus trabajos en los diferentes ramos del saber humano. Sólo su Lógica, con su programa vasto de renovación, nos revela la profundidad de su obra y ella es la única clave para la gran coherencia de su obra. Couturat publicó en un tomo aparte también los manuscritos originales del filósofo, en su mayor parte escritos en latín y en francés. Yo seguiré en mis exposiciones a estos trabajos del matemático francés.

A la edad de doce años Leibniz ya se puso en contacto con la

lógica escolástica, y ávido de descubrir algo nuevo esbozó con catorce años ya un plan de reforma lógica que es la raíz de todos sus trabajos futuros en esta materia. Había observado que las categorías de Aristóteles sólo clasificaban los términos simples, y él preguntó a su profesor porqué no se clasificaban también los términos o conceptos complejos, así como hacen los geómetras. De esta consideración salió más tarde su idea de la matemática universal que comprendía, como la lógica moderna de hoy, la lógica y las matemáticas juntas. Su maestro que no le sabía contestar nada, dijo que un chico debe solo aprender, pero no tratar de introducir mejoras. No obstante, Leibniz, en aquella época, no sabía suficiente matemática para desarrollar sus ideas y primero tenía que dedicar su tiempo a los estudios del derecho. Empezó con el estudio de la literatura e historia greco-romanas y más tarde se ocupó con los escolásticos. Con veinte años se hizo doctor de derecho y con esto ya tenía el fundamento para su empleo oficial posterior. En seguida se dedicó a la filosofía del derecho aplicando la lógica al derecho diciendo que « jurisprudencia no es otra cosa que la lógica aplicada a las cuestiones morales » así como existe, dice, una lógica teológica, una lógica de medicina y lógica matemática (álgebra). Buscaba los principios del derecho natural para basar en ellos el derecho positivo. Nos llevaría muy lejos si quisiéramos enumerar sus trabajos en esta materia. Una vez entrado en los servicios del archiduque de Maguncia, éste le mandó a París en misión diplomática. En París entra en contacto con los espíritus más selectos de Europa. Trata de introducir el método riguroso en cuestiones de moral y política por dos escritos de los años 1669 y 1671 para recomendar a Louis XIV de conquistar Egipto y desviarlo de la guerra de Holanda y de otras guerras europeas. Por el mismo rigor lógico está dominado su proyecto de unir todos los sectores protestantes y reconciliarlos con el catolicismo, para lograr de nuevo la unidad de la iglesia cristiana. Trata todas las materias en forma universal mediante su ideal lógico de claridad deductiva cuyo modelo se encuentra en rigor sólo en las matemáticas. En París concibe también su proyecto de Enciclopedia que junto a su Característica Universal y su Ars combinatoria desarrollan sus ideas lógicas o su matemática universal. Descubre el cálculo diferencial e integral simultáneamente con e independientemente de Newton y se queja de la acumulación de los libros eruditos malos e inútiles que

ahogan los buenos libros y dice que este estado nos conducirá a la barbarie. Quiere por eso obras enciclopédicas que dén todas las informaciones científicas e históricas compuestas por primeras autoridades en la materia. No puedo entrar en más detalles, pues tengo que dedicarme ahora al tema principal de hoy, la Lógica de Leibniz.

Observamos recién que Leibniz ya se ocupó en su juventud con la Lógica aristotélica escolástica y que tenía la idea de investigar también los conceptos y juicios compuestos del lenguaje al lado de lo que la silogística aristotélica había investigado. Quería elaborar, como decía, « una lógica más sublime que la lógica común, que no es más que el abecedario frente a la erudición ». En esta nueva lógica, llamada la Combinatoria, Leibniz quiere analizar todos los conceptos compuestos y reducirlos a conceptos simples. Dijo que nuestro lenguaje puede ser reducido a conceptos básicos que significan los hechos primitivos reales del saber. Considera este análisis del lenguaje como parecido a la descomposición de los números naturales en números primos. De la síntesis de los conceptos simples resultan entonces conceptos y frases compuestos. De esta manera, así piensa, podemos conseguir todas las frases posibles que se puedan expresar en el lenguaje. Leibniz cree en esta su primera época que la cantidad de conceptos simples es relativamente reducida pero que la combinatoria de los conceptos simples da lugar a innumerables combinaciones. Cuando se dé a cada concepto simple un símbolo o un número, así opina, entonces se podrá crear algo como un alfabeto de los pensamientos humanos. Cito un ejemplo de él: Dando al concepto « animal » el número 2 y al concepto « razonable » 3, se puede escribir la siguiente ecuación « hombre = animal por razonable » igual a « 6 = 2 por 3 ». De esta manera el concepto « hombre » conseguiría el número « 6 ». En la lógica, como en la matemática, dice, todo es arte combinatorio. Hay que determinar los conceptos primitivos y determinar sus relaciones de inclusión o implicación y exclusión, esto se consigue descubriendo todas las verdades respecto de tal o cual concepto idiomático en todos los juicios posibles. De esta idea sale la Característica Universal o la Algebra Lógica que reemplazaría los conceptos idiomáticos ordinarios mediante combinaciones de símbolos especiales. Los juicios serían reemplazados por las relaciones entre los símbolos y el razonamiento se convertiría en una especie de cálculo universal. Con un programa mucho más reducido que el de Leibniz en esa

época, cuyo programa demasiado vasto no parece realizable, se trabaja hoy en la Lógica moderna.

Antes de concebir esta « Característica Universal », incluyendo el cálculo lógico cuya idea compleja recién desarrollaba, como veremos, cuando empezó a ocuparse más con problemas matemáticos, Leibniz quería crear un idioma universal más o menos en la forma del « Esperanto » de hoy. Había ya varios antecedentes de otros pensadores que se ocuparon con este problema, también hay que recordar que la idea, en forma rudimentaria, de una matemática universal ya estaba en la filosofía de Spinoza y otros. Pero muy diferente es el sistema universal concebido por Leibniz, pues quería reemplazar todos los idiomas nacionales en el comercio y en el intercambio de los hombres de ciencia, ideas en parte ya concebidas en el Renacimiento y por Descartes. No obstante, Leibniz supera más tarde esas ideas mediante su proyecto de la lógica matemática universal que llama, como he dicho, « Característica Universal », que traduce el idioma en un cálculo lógico. Ahora bien, para elaborar ese « alfabeto de los pensamientos humanos », Leibniz tenía que crear primero un vocabulario básico, donde se analizan todos los conceptos y se los reduce a sus elementos más sencillos mediante la definición. Con esto se conseguiría un inventario de los conocimientos humanos y se podría reducir todas las verdades conocidas por los hombres a sus elementos más primitivos. Mediante la Combinatoria o el Cálculo lógico se podría entonces conseguir todas las verdades derivadas. De esta manera tendríamos una enciclopedia demostrativa o una « Característica Universal », que representaría el verdadero lenguaje universal o filosófico. Cuando habría entonces en el futuro diferencias entre los filósofos se diría simplemente: Calculemos y veremos el resultado.

La idea de la Enciclopedia como primer paso hacía una « Característica Universal » ocupaba a Leibniz durante toda su vida. En base de su descubrimiento del cálculo infinitesimal que debía al encuentro de nuevos símbolos matemáticos adecuados Leibniz se dió cuenta de la importancia de crear buenos símbolos lógicos y de su fecundidad una vez encontrados. Por eso leemos en un fragmento inédito que se debiera poder deducir de la forma y de la composición misma de los conceptos todas las propiedades que representan, y da como ejemplo la numeración del sistema binario que puede representar mediante el cero y el uno toda la numeración. De la

misma manera, así piensa, como la combinación de los símbolos representa la combinación de ideas, el cálculo lógico puede representar el razonamiento y todas las etapas del cálculo lógico pueden fijarse en el papel. Hobbes ya había dicho: « El razonamiento es un cálculo », pero Leibniz da un significado más profundo a estas palabras mediante su « Característica Universal ».

Para poner en práctica estas ideas Leibniz se dió cuenta que precisaba la colaboración de todos los eruditos internacionales. Por eso propone fundar una Sociedad Científica Internacional que no solamente tendría que registrar todos los conocimientos ya adquiridos por la humanidad sino tendría que hacer investigaciones y descubrimientos en forma sistemática, tanto en forma racional (quiere decir en la lógica) como mediante el experimento. El resultado del trabajo de esta Sociedad Internacional sería la Enciclopedia. En esta obra cada proposición o cada frase debería ser o un postulado o un juicio probado. Los postulados representarían las definiciones, los axiomas y las hipótesis. Los demás juicios o proposiciones serían probados por demostraciones o por experimentos. Si no se consigue la verdad y la seguridad absolutas, entonces, opina Leibniz, se buscan las conclusiones más probables. Leibniz ha especificado dos veces un plan general de su Enciclopedia, según las materias. En el último bosquejo coloca primero: La gramática racional, una especie de disciplina epistemológica preliminar, siguen, la Lógica con la combinatoria o cálculo lógico, el análisis, la matemática y las ciencias físicas incluso todas las ciencias naturales, la medicina, la psicología, la política, la economía y al final la jurisprudencia y la teología. La obra finalizaría por una demostración lógica de la verdad del cristianismo y por un proyecto de reconciliación de todas las iglesias cristianas mediante una Sociedad de los Amigos de Dios. Leibniz se presenta aquí como el conciliador y pacificador de los espíritus para concluir de una vez las disputas inútiles de los teólogos y de los filósofos y para reunir a todos los sabios y filósofos en una obra común. Esto es algo más de lo que está en el programa de la filosofía científica de hoy. En esta obra, el arte de demostrar y de inventar está reservado a la nueva lógica que da la forma a la Enciclopedia. Esta constituye, así dice, la verdadera « filosofía perennis ». En otro fragmento, Leibniz declara que quiere trabajar para la felicidad del género humano y que nada podría contribuir mejor al bien público que su Enciclopedia proyectada.

Para Leibniz, el verdadero fin del género humano es la investigación y el conocimiento del Universo, por eso la política, así dice, no tiene otro fin que promover la virtud y el progreso de las ciencias. Ese progreso es la condición para la felicidad del hombre, no solamente para mejorar el bien material sino las ciencias representan el principio de toda civilización y de toda virtud. En una carta a Burnett, de 1699, dice textualmente: « Mis principios son, como usted sabe, de preferir el bien general a todas las demás consideraciones, aún a las de la gloria y del dinero ». En otra parte dice: La justicia es la caridad del sabio, la sabiduría es la ciencia de la felicidad que presupone la verdadera erudición; esto es el conocimiento de todas las ciencias. Aún dice que la ciencia es el fundamento de la amistad que sólo es sólida y duradera cuando se apoya sobre la razón. La moral de Leibniz reune el utilitarismo con el intelectualismo. Agrega que el mejor medio de conocer y honrar a Dios es estudiar el Universo y mejorar la condición humana. El mejor himno que se pueda cantar a Dios consiste en descubrir una nueva ley natural o hacer una invención útil a la humanidad.

La Enciclopedia proyectada, dice Leibniz, nos libraría de esa cantidad de libros inútiles y nos dispensaría de escribirlos porque cada invento tendría en ella en seguida su lugar. Al fin aplica su lógica también a las ciencias históricas y es un precursor del método filológico-crítico moderno en la historia.

Como la Enciclopedia o Característica Universal presuponen, según hemos visto, la Combinatoria o Lógica General, tenemos que ocuparnos ahora más de cerca con esta disciplina. Esta Lógica o ciencia general es una generalización del método matemático ya iniciado por Descartes, pero ampliado por Leibniz; contiene el análisis y la síntesis. El análisis de las *ideas* es igual a su definición y el análisis de las *verdades* está en su demostración. El primero está basado por Leibniz en el principio de identidad de la lógica clásica junto con el principio de la contradicción. Hay que darse cuenta que la Lógica de Leibniz conserva los rasgos ontológicos de la lógica aristotélica, en contradicción con la lógica moderna en base del nominalismo. Leibniz dice aún, que la naturaleza está penetrada por la Lógica o que es una « Lógica viviente »; por eso la naturaleza no puede realizar nada que sea contradictorio o ininteligible. Leibniz admite al lado de las verdades puramente lógicas a priori las verdades empíricas fundamentales de los hechos primi-

tivos básicos; estos últimos los considera también como necesarios sin hacer ninguna concesión al empirismo, pues para un entendimiento infinito o para el espíritu universal, Dios, dice, los hechos empíricos tienen también el carácter lógico necesario. Para nosotros, empero, que no conocemos jamás todas las razones de Dios, los hechos empíricos constatados no tienen carácter necesario analítico. Nuestras experiencias son pobres substitutos de la razón de Dios, o de la razón universal. Nosotros los mortales nunca podemos realizar las síntesis infinitas que solo Dios sabe hacer, pues solo El, así diríamos en el lenguaje matemático, puede realizar completamente la inducción total, el infinito actual y solucionar la integral cósmica. La realidad subsiste, según Leibniz, debido a una infinidad de causas que solo Dios conoce como razones suficientes que encierran la continuidad y el infinito actual. Por eso mismo se levantan interminables controversias entre los sabios respecto a hechos empíricos, pues cada uno puede invocar infinitas causas que solo Dios conoce en su totalidad. A nosotros nos queda, a lo sumo, dice, el método del cálculo de probabilidad. Nosotros podemos hacer la sumación de la probabilidad total de cada partido que discute con sus limitadas razones en pro y en contra. Se aplica de esta manera el cálculo infinitesimal a las probabilidades y éstas reemplazan, así dice, las deliberaciones vagas y confusas. En base del cálculo infinitesimal está concebida su Lógica Ontológica y su Metafísica, la Monadología, que tiene su fondo matemático en el concepto de las mónadas, esos seres espirituales de extensión infinitamente chica. Como el método matemático es el método demostrativo más puro, había que generalizar la matemática y fundirla con la lógica en una Matemática Universal, que vamos a considerar ahora detenidamente.

Primero hay que darse cuenta de que Leibniz encuentra la siguiente analogía entre la Lógica y la Matemática: La Lógica estudia: 1) los conceptos, 2) los juicios o proposiciones, 3) el razonamiento. A estos renglones corresponden en matemáticas, especialmente en el álgebra: 1) las fórmulas sencillas compuestas de números (los números corresponden al alfabeto en el lenguaje), 2) las ecuaciones que existen entre dos y más fórmulas que corresponden a los juicios del lenguaje y 3) las operaciones, transformaciones y deducciones de varias ecuaciones que corresponden al razonamiento idiomático. Reemplazando los conceptos, juicios y el razonamiento

por símbolos del álgebra podemos desarrollar una lógica matemática conforme a la técnica matemática. Esta idea ha sido realizada en vasta escala por la lógica moderna. Leibniz dice muy bien que todas las disciplinas matemáticas, la aritmética, la geometría, la mecánica, esto es las ciencias de la matemática aplicada, son solo ramos de la matemática universal ya iniciada por Descartes mediante su geometría analítica. Leibniz quiere ampliar todas estas disciplinas en una ciencia de las formas o lógica universal. Tal lógica, como la lógica moderna, comprende la parte general y formal de las matemáticas, estudia en otras palabras todas las relaciones que pueden existir entre cualesquiera objetos, su encadenamiento necesario y formal en base de su sintáctica. Esto es la verdadera ciencia general de las relaciones abstractas y es exactamente el programa de la Lógica moderna. Leibniz tiene el mérito de haberse dado cuenta de todo esto mucho antes del desarrollo paulatino de esta nueva disciplina, que se debe a una cantidad de pensadores que no conocían nada de los trabajos de él. Con anticipación de por lo menos un siglo y medio, Leibniz, sabía que existe una matemática universal, de la que todas las ciencias matemáticas pueden deducir sus más generales teoremas y esta matemática más general es la Lógica misma; la lógica clásica representa solo una parte y ni siquiera la parte más importante de esta nueva lógica. Las formas silogísticas de la lógica clásica no bastan; con razón dice que hay que reemplazar los conceptos significativos por símbolos sencillos indeterminados como en álegbra e introducir símbolos para las relaciones que puedan existir entre ellos y operar con los símbolos según las reglas de transformación como lo hacemos en la lógica moderna. Esta lógica matemática es su « Característica Universal » en vasto sentido y une la lógica con la matemática, es una verdadera matemática del pensamiento humano, una álgebra universal. De esta disciplina Leibniz solo empezó a elaborar el cálculo lógico de la teoría de identidad y de la implicación aplicable al lenguaje y a la geometría y un cálculo geométrico aplicable a las relaciones espaciales en general. Solo del primero nos ocuparemos ahora.

Leibniz ha esbozado por lo menos tres sistemas de cálculos lógicos sin adoptar ninguno definitivamente. Al principio quería reemplazar la composición lógica de los conceptos compuestos mediante la multiplicación aritmética. Ya mencionamos al principio de nuestra conferencia que atribuía números primos a los conceptos

simples. El producto de los números primos representa entonces el concepto compuesto. Cada concepto recibe de esta manera su número característico. Observa muy bien que cualquier objeto puede definirse de varias maneras, como un número compuesto puede ser dividido por diferentes números. Más tarde tiene que abandonar este sistema, pues las dificultades van en aumento, no encuentra una solución definitiva e incurre en varios errores. En sus últimos ensayos, Leibniz deja a un lado los números y usa letras, como la lógica moderna, para significar conceptos y proposiciones.

En vez de una aritmética lógica desarrolla un álgebra lógica y emplea más bien métodos empíricos semejantes a los de Aristóteles; no usa ninguna cópula matemática sino sólo la cópula latina «est». Las reglas fundamentales de esta lógica son: El principio conmutativo y el principio de la tautología que caracterizan hoy la multiplicación lógica; el primero expresa el orden indiferente de los factores y el segundo la repetición inútil. Siguen los dos axiomas («per se verae»): 1) El de la identidad: *a* est *a* y el de la simplifcación *ab* est *a*, o: *ab* est *b* (todo animal razonable es un animal o es razonable). Además admite otro axioma que representa el principio del silogismo:

Si *a* est *b* y si *b* est *c*, *a* est *c*; y formula su famosa fórmula de la identidad lógica de dos términos diciendo que *a* y *b* son idénticos cuando se puede substituir uno por el otro y vice-versa en un juicio sin alterar su verdad. Al final desarrolla entre otros un teorema de multiplicación de varias proposiciones como sigue:

Si *a* est *b* y *c* est *d*, entonces: *ac* est *bd* y establece un cálculo lógico para la negación en base del principio de contradicción y del medio excluído. Formula el principio tautológico no solo para la multiplicación lógica sino también para la adición lógica, el primero fué formulado y redescubierto un siglo y medio más tarde por Boole y el segundo por Jevons, pero Leibniz no logró desarrollar completamente el cálculo de la adición lógica.

Los más importantes ensayos sobre la lógica matemática de Leibniz datan, empero, del año 1686, el principal es: «Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatem». En esta obra usa letras grandes como símbolos del cálculo lógico. Las dos relaciones fundamentales «identidad» e «inclusión» se definen también mediante la idea de la sustitución. Lo que oscurece aquí como en otras partes la obra de Leibniz es que atribuye existencia aún a los con-

ceptos generales. « Concepto » y « Ser » son casi siempre sinónimos. El « ser » se define por posible o no contradictorio en base de su lógica ontológica que mantiene, pero admite que una proposición puede ser imposible o implicar una contradicción formal. Por eso no puede enunciar una regla general de que toda proposición general exista o sea posible. Esta dificultad no ha sido solucionada por Leibniz. En este mismo ensayo formula otro principio muy importante redescubierto más tarde por Boole que constituye una perfecta analogía entre las proposiciones categóricas y hipotéticas: Si A est B, entonces C est D se puede traducir en: (A est B) est (C est D). La cópula « est » puede tener también el sentido de « contiene » y este sentido es el que prefiere Leibniz generalmente. Más tarde él se da perfectamente cuenta de que las proposiciones particulares implican la existencia mientras que las proposiciones generales no la implican. Desgraciadamente vuelve más tarde a la tradición aristotélica y atribuye otra vez existencia también a los conceptos generales. No obstante, Leibniz se ha dado perfectamente cuenta de los verdaderos principios de la Lógica matemática y no faltaba mucho para formular todo el sistema moderno de la lógica de las proposiciones. Lo que hizo fracasar repetidas veces su trabajo era su manera de seguir demasiado a Aristóteles en su punto de vista intensional del contenido de los juicios mientras que la lógica moderna sólo ha sido desarrollada en base del punto de vista extensional de sus términos y sus frases, este último punto de vista ya había sido subrayado por los escolásticos. A pesar de esta situación Leibniz, en otra ocasión, criticó muy bien a la silogística de Aristóteles en base de un punto de vista puramente extensional, y también ya formuló el famoso principio, llamado el de Morgan, que este pensador redescubrió más tarde y que dice: A o B igual a: no (no A y no B).

En base de la lógica ontológica de Leibniz, que funda también su obra metafísica, la Monadología, el predicado está siempre contenido en el sujeto, esto también es la consecuencia de su punto de vista intensional que considera solo la comprensión de los conceptos y no se limita a su extensión. Hoy sabemos que la implicación extensional tiene un carácter diferente de la implicación intensional. Basta recordar el libro de Lewis y Langford con sus investigaciones sobre este particular y los libros sobre la Semantica de R. Carnap.

Resumiendo se puede decir que Leibniz tenía una idea más o menos precisa de todas las operaciones lógicas de la lógica de proposiciones, no solo de la multiplicación y adición lógicas, sino también de la negación, sustracción y aún división. Así mismo conocía la verdadera traducción de las cuatro proposiciones clásicas en el lenguaje del cálculo lógico. También ha formulado ya una definición logística de los números naturales. Definía el número en la forma siguiente:

Si *a* est *m*, y *b* est *m*, y si *a* est *b*, y *b* est *a*, entonces *m* est uno. Hay que recordarse en esta ocasión que la cópula «est» significa aquí existir, tiene carácter ontológico. Los números siguientes los define así:

Si *a* est *m* y *b* est *m* y si *a* y *b* son desparejos, entonces existen dos *m*, y así siguen los demás números.

Leibniz también ya se dió cuenta de la importancia decisiva de los conceptos de puras relaciones en la lógica al lado de los conceptos clasificadores. Pero recién en el siglo XIX fué desarrollado por primera vez una lógica matemática universal en la que entró también la lógica clásica en su forma más generalizada en base de los trabajos de sus nuevos fundadores De Morgan, Boole, Peirce y Schröder. No obstante, dice Couturat, con razón, al final de su obra, Leibniz ya poseía casi todos los principios de la nueva lógica y en cierto grado había avanzado más que Boole mismo.

Con esto quiero concluir mi exposición fragmentaria de la Lógica de Leibniz. Muy bien dijo también Bertrand Russell en su libro sobre la Lógica de Leibniz, que Leibniz como filósofo es mucho más grande de lo que ha parecido hasta ahora. Su importancia crece todavía en vista de la publicación de todos sus manuscritos y debido al desarrollo de la Lógica moderna. Su metafísica, la Monadología representa hoy solo una curiosidad filosófica, pero en la lógica y matemática «muchos de sus sueños han sido realizados y se ve hoy que sus sueños lógicos que a sus contemporáneos y sucesores hasta nuestro tiempo parecían imaginaciones fantásticas, han sido de suma importancia».

Hoy vemos que su Lógica forma el centro de todas sus especulaciones filosóficas, metafísicas y de sus descubrimientos matemáticos. Es un caso tal vez único en la historia de la filosofía que las ideas más importantes del más grande filósofo alemán quedaran escondidas en los archivos de la biblioteca de Hannover durante unos

doscientos años, casi hasta el año 1900 y que recién al principio de este siglo hayan recibido toda la atención que merecen. También es característico que hayan sido un pensador inglés y un francés que por primera vez se dieran cuenta de la profundidad de los pensamientos de Leibniz. Ha sido una desgracia para el desarrollo filosófico de Alemania que Kant con su gran inteligencia no haya podido conocer esta obra lógica de Leibniz y que no la haya podido ampliar y basar sus trabajos sobre ella. Al contrario, toda la gran obra de la « Crítica de la Razón pura » de Kant se basó únicamente en la lógica clásica antigua y por eso su crítica creó más bien una camisa de fuerza para el espíritu humano y nos llevó a un callejón sin salida. Dió origen a los sistemas posteriores de los románticos alemanes Fichte, Schelling y Hegel, que se desviaron demasiado de la corriente europea de la filosofía representada por Leibniz y aún por Kant. Una estrechez espiritual posterior en la filosofía alemana fué el resultado cuyas consecuencias se hicieron sentir hasta nuestros días y han contribuído a oscurecer el humanismo de la época clásica alemana.

La filosofía de Leibniz significa el fin del Renacimiento y el principio de la época de la Iluminación. Leibniz era un filósofo intelectualista y racionalista que cree en la misión renovadora y cultivadora de la razón humana redimida y el espíritu científico, libre de prejuicios como nuestro instrumento más poderoso para crear el bienestar general y una verdadera cultura humana y universal para todos los hombres de la tierra; y en esto estamos perfectamente de acuerdo con él, tan lejos que estemos de este ideal en este momento.

SOBRE FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS

POR

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 5 de julio de 1946.

Señoras:
Señores:

Debo comenzar por agradecer cordialmente a nuestra Sociedad por haberme brindado una vez más su conspicua tribuna que, honrada por tantos sabios, hónrame hoy a mí que no lo soy. Deploro al mismo tiempo que ella haya decidido cargar con pesado bagaje hombros tan débiles; pues empresa difícil es, sin duda, transformar el tema de esta conferencia en algo ameno, o siquiera medianamente pasable. Sírvame, pues, de excusa ante ustedes, la notoria desproporción entre la empresa y su ejecutor.

El hombre tiende naturalmente al bien; esto no es sino la definición misma que del bien da Aristóteles. El hombre tiende naturalmente, ya sea al Bien supremo, ya a los bienes subordinados. Y uno de estos bienes subordinados es la verdad, objeto de la ciencia y de la filosofía. A su vez entre las ciencias brilla como una gema valiosa la Matemática, la reina de las ciencias, como ha sido llamada. El matemático es, por consiguiente, nada más que un humilde explorador de la verdad y del bien. Y considera como bálsamo precioso cualquier verdad arcana que halle acaso en su camino; y quisiera derramar tal bálsamo a manos llenas, para beneficio de todos; pues sabe que en él hay algo de felicidad, como la hay en una verdad filosófica o en un trozo de música.

Esta es la suprema filosofía de la Matemática. Esta es la suprema Filosofía de todas las filosofías, de todas las ciencias y las artes, de todas las actividades humanas. Es el bien, el supremo Bien hacia el que todo tiende.

Pero descendamos de plano tan trascendente y preguntémonos: ¿Qué entendemos comúnmente por Filosofía de las Matemáticas? Al decir de Maritain [1], la Filosofía es una ciencia que nos ayuda a conocer «por las causas primeras»; vale decir, que nos lleva a investigar la esencia misma de las cosas. Y añade que ella se funda en los primeros principios inmediatamente evidentes. Tal definición, a mi parecer, conviene perfectamente cuando se aplica a nuestro tema. La Filosofía de las Matemáticas será pues, la disciplina que nos ayuda a conocer los principios de los objetos matemáticos, las causas primeras que impelen la ciencia matemática, la esencia misma de las Matemáticas.

Si nos preguntamos, en consecuencia, qué son y de dónde nos vienen esos objetos matemáticos, y cuál es la esencia de la Matemática, ya comenzaremos a hacer Filosofía matemática; y hallaremos al mismo tiempo nuestros primeros tropiezos. Creo que no será éste un mal comienzo para nuestro objetivo.

Para responder a la cuestión, conviene tener una idea, siquiera sea a grandes rasgos, del campo que abarca la Matemática actual. Un matemático del fin del siglo nos la hubiera dividido en dos grandes ramas: Aritmética y Geometría. Hoy le agregaríamos una tercera: Teoría de los Conjuntos. Esta, que sirve de punto de apoyo a las otras dos, trata de las propiedades de los conjuntos o colecciones de objetos más abstractos; es decir, de las propiedades que resultan del simple hecho de ser conjuntos, independientemente, o casi, de la naturaleza de sus elementos. Al profano le resulta inimaginable cómo pueda ésto llegar a ser una teoría de importancia; cómo entes tan abstractos y sutiles pueden manifestar tantas propiedades y dar tanto quehacer. Yo veo en esta y otras análogas circunstancias una prueba del amplio desarrollo alcanzado por la Matemática. Me explicaré: entiendo que hacer ciencia es distinguir, diferenciar, clasificar. De entre el mundo nebuloso que los fenómenos o los hechos (ya sean exteriores o mentales) nos pintan, el científico debe dedicarse a la tarea de estudiar sus semejanzas y diferencias; clasificar unos y otros, en grupos cada vez más definidos, para de ese modo ir extrayendo de toda aquella informe nebulosa, un mundo con contornos cada vez mejor delineados. Así

(1) J. Maritain, Introducción general a la Filosofía; Buenos Aires, 1944, pág. 81 y sig.

procede en suma el físico, el químico, el biólogo. Y también el matemático, dentro de su esfera propia, que es de índole sobre todo mental. Por eso digo que cuando se ha logrado una teoría rica acerca de un tema como el de los conjuntos, ello prueba el alto grado de evolución de la ciencia que nos ocupa.

Las otras dos partes del vasto campo de la Matemática son más conocidas en cuanto a sus respectivos objetos fundamentales: la Aritmética se ocupa del número, la Geometría del espacio. Advirtiendo empero que «número» y «espacio» deben tomarse en un sentido tan amplio, que poco les queda de su contenido intuitivo. Número, para el matemático, es no sólo aquél que manejamos cuotidianamente, y cuya manifestación más concreta preocupa tanto a fin de mes a las amas de casa, sino también cualquier otro ente que pueda someterse a operaciones tales como la suma y multiplicación, convenientemente definidas en cada caso, obligándolo así a entrar en los carriles promisores del Algebra. De igual manera, espacio es no sólo aquel en el que nos movemos y actuamos, sino también todo conjunto en el cual existan, puntos, líneas, figuras, o elementos que se comportan como tales.

Repito que esta división es demasiado esquemática. Es la que primero se presenta al profano. Según la idea ya expresada, el que desee hacer ciencia matemática no podrá contentarse con esta clasificación tan primitiva, sino que necesitará ir diferenciando sucesivamente nuevas ramas, cada vez menos amplias y más determinadas, dentro de la Teoría de Conjuntos, la Aritmética, la Geometría. Hallará así la Topología, el Algebra, la Teoría de funciones, el Análisis matemático, la Geometría algebraica, la Geometría proyectiva, y otras disciplinas que pueden clasificarse dentro de una u otra de aquellas grandes ramas, o que cabalgan en dos de ellas. Esto nos da una idea general, si bien un tanto vaga, del contenido de las Matemáticas y de los objetos matemáticos.

Estos objetos matemáticos no nos son dados por el mundo exterior, o lo son en mínima e insignificante parte. La intuición no juega en la Matemática el papel que quería atribuirle Kant. Conceptos como los de *número hipercomplejo, tensor, funcional,* sólo podrían decirse provenientes de la intuición estirando exageradamente la significación de esta palabra. Tampoco son todos ellos de un contenido exclusivamente intelectual, como lo observamos especialmente en los conceptos geométricos, punto, recta, plano y aná-

logos. Creo que también se equivocaba Dedekind ([1]) cuando hablaba del número como « libre creación del espíritu humano », aunque tal vez estuviera más cerca de la verdad que Kant. En realidad, lo que parece ser el fondo del asunto es una especie de sublimación (permítaseme el término) de la intuición común. Un objeto dado por ésta puede llegar a ser un objeto matemático, pero gracias a un proceso de elaboración mental por el cual se le retiran ciertas propiedades concretas y particulares. Lo abstracto y lo general constituyen, al decir de Whitehead([2]), cualidades « sine qua non » de los objetos matemáticos. Sólo que este proceso no tiene porqué efectuarse en una sola vez; muy bien puede ocurrir como una especie de destilación fraccionada, que va dejando subproductos cada vez más alejados del mundo sensitivo y adentrados en el mental, casi diríamos en el mundo platónico de las ideas puras. Es lo que ha ocurrido, por ejemplo, con el concepto de *número*: la necesidad de comparar entre sí diversas pluralidades de objetos conduce a la operación de contar, la más simple de las operaciones aritméticas, es decir, utilizar símbolos, llamados números naturales, para expresar propiedades comunes a ciertas colecciones y que las distinguen unas de otras. Pero el pensamiento matemático, ya puesto en marcha, no se detiene allí: observa, compara, reflexiona sobre los números mismos, y halla que se puede extender su primitiva significación, inventando nuevos símbolos para expresar partes de un todo; son los números fraccionarios o quebrados; luego aparecen también los números negativos, los irracionales, los imaginarios... El desenfreno de la imaginación matemática, ya librada de sus ataduras terrenas, lleva a concebir como « número » a cualquier ente abstracto con el que se pueda operar con las reglas aritméticas o algebraicas. Y la destilación será llevada, sin duda, más adelante cada vez; y de este modo, el pensamiento se mueve ya en un mundo sublime, totalmente separado del universo sensible.

Esto nos lleva a tratar de la definición de la Matemática. Es evidente que la definición archiclásica como « ciencia de la cantidad » no responde a la realidad actual: hay muchas partes de la Matemática actual que poco o nada tienen que ver con la cantidad;

([1]) R. DEDEKIND, Was sind und was sollen die Zahlen?, Harzburg, 1887.

([2]) A. N. WHITEHEAD, An introduction to mathematics, traducida bajo el título: Introducción a las matemáticas. Emecé, 1944.

salvo que se entienda por ésta algo tan amplio, que la definición pierde todo significado. Si se mantiene el sentido que a la « cantidad » daba Aristóteles, correspondería ampliar la definición diciendo que de las diez categorías aristotélicas, la Matemática se refiere, al menos parcialmente, a tres: cantidad, relación y cualidad.

Es un hecho que los filósofos no han sido felices en la cuestión de definir la ciencia matemática. El hecho se debe a que filósofos y matemáticos hablan diferentes lenguajes, y les falta un intérprete adecuado que traduzca las palabras homónimas de uno a otro idioma; lo cual es particularmente difícil en tiempos como éstos, de gran desarrollo y especialización, en que no existen Picos de la Mirándola ni Leonardos, y en que no basta una vida humana para penetrar al detalle cualquiera de las ciencias. Pero no culpemos demasiado a los filósofos. Tampoco los matemáticos se ponen de acuerdo en la definición de su propia ciencia. Para Benjamín Peirce es « la ciencia que obtiene conclusiones necesarias ». Para Bertrand Russell (1) es « la clase de las proposciones *p implica q*, siendo *p* y *q* proposiciones... ». No faltan tampoco en este aspecto las paradojas chistosas, como aquella célebre del propio Russell, según la cual en la Matemática « uno no sabe nunca de lo que habla, ni si lo que dice es cierto »; lo cual, si bien se piensa, se reduce a una mera paráfrasis de la definición anterior. Carlos Peirce la define en cambio como « estudio de las construcciones ideales (a menudo aplicables a problemas reales) y en consecuencia, descubrimiento de relaciones, todavía incógnitas, que subsisten entre los elementos de sus construcciones ». No excluyamos de todas éstas, la que ubica a las Matemáticas en un lugar intermedio entre la Lógica y las ciencias experimentales.

De todas estas opiniones, aún dispares y parcialmente contradictorias, destila un concepto con el que, al menos aproximadamente, captaremos la verdad. Es que en realidad, la Matemática no puede ser hoy la misma ciencia, y con las mismas limitaciones, que hace siglos. Estos siglos de progreso han ampliado, claro está, sus horizontes, y extraordinariamente en los últimos tiempos. Agregaré que, en mi humilde parecer, una de las mejores definiciones para la Matemática actual es la última citada, de Carlos Peirce, la de las *construcciones ideales*: está de acuerdo con lo ya explicado

(1) B. RUSSELL, The principles of mathematics, Londres, 2ª ed., 1937, pág. 3.

acerca del origen y naturaleza de los entes matemáticos, y a pesar de su vaguedad, o tal vez a causa de ella misma, se adapta a todas sus ramas. Cada una de ella consta, en efecto, de « construcciones ideales », y me permitiré agregar que según que estas construcciones se basen más o menos directamente en datos de la experiencia, podrán clasificarse las distintas ramas en más o menos *aplicadas* o *puras*, y serán más o menos capaces de una aplicación inmediata, práctica, a problemas reales. Un ejemplo muy adecuado lo tenemos en la Geometría Proyectiva: es ésta una rama de la Geometría que, basada en axiomas o postulados parecidos a los de la geometría elemental que nos enseñaron en la escuela, prescinde sin embargo (esta es su característica) de toda noción de índole métrica: en Geometría Proyectiva está prohibido hacer la distinción entre un segmento de dos centímetros y uno de dos kilómetros; se considera asimismo subversivo decir que tal ángulo mide tantos grados; y así sucesivamente. A partir, pues, de sus axiomas, la Proyectiva se desarrolla lógicamente, constituyendo una, magnífica, de las « construcciones ideales » de Carlos Peirce. Pero esta flor maravillosa, cultivada con tanto cuidado en su invernáculo, aislada del mundo real, le da sin embargo su fruto de mucho provecho: la Proyectiva sirve de base a cosas tan prácticas y utilitarias como la Estática gráfica, que permite a los ingenieros calcular sus vigas y puentes, o la Fotogrametría, que utilizan los agrimensores para levantar sus planos con exactitud y rapidez.

Acabamos de mencionar los desarrollos lógicos de una rama matemática, lo que nos lleva a la cuestión de las relaciones de las Matemáticas con la Lógica. Indudablemente, no toda la Lógica es Matemáticas; pero, ¿toda la Matemática es Lógica? El problema tiene sus raíces en la índole del razonamiento matemático. A cada paso, en la demostración de un teorema, oímos decir a nuestros alumnos: « es lógico », « esto se deduce por lógica » y expresiones análogas. ¿Hasta qué punto están en lo cierto?

El problema merece ser, desde luego, puntualizado, con vistas a su ulterior estudio. Su solución dependerá naturalmente de lo que entendamos por Lógica y de lo que entendamos por Matemática. Volvemos por consiguiente a la cuestión de la definición. Por ejemplo, si por Matemática se entiende una disciplina colocada entre la Lógica y las Ciencias experimentales, queda ya dicho que existirá sólo una parte común a ella y a la Lógica. Pero si adoptamos

un concepto más moderno de la Matemática, la solución no es tan inmediata ni sencilla.

Poincaré es, creo, el primero que ha llamado la atención sobre un tipo de razonamiento muy frecuente en Matemáticas, y que trasciende la Lógica aristotélica: se trata de la *inducción completa,* bien conocida de todo matemático: si una propiedad vale para el número cero, y si al valer para un número natural vale también para el siguiente, entonces esa propiedad vale para todos los números naturales. Por ejemplo, la propiedad de que «el orden de los sumandos no altera la suma» vale cuando un sumando es cero (cualquiera sea el otro); y si vale para un cierto número como sumando, vale también para el siguiente; luego, vale para todos los sumandos posibles.

Ahora bien: lo único que podríamos extraer por aplicación de la lógica clásica de las premisas que figuran en el principio de inducción completa, es que la propiedad a que nos referimos vale para *cualquier* número, más no para *todo* número. O, dicho más sencillamente: si nos dan un número cualquiera, podremos formar una cadena de un número finito de silogismos que nos permitirá concluir la validez de la propiedad para el número dado. Diremos: puesto que la propiedad vale para el cero, y al valer para un número vale también para el siguiente, vale también para el uno; puesto que vale para el uno... vale para el dos; etc. Podemos llegar así hasta cualquier número dado de antemano; pero es inadmisible (dentro de la lógica clásica) una cadena de infinitos silogismos.

Esto no significa que el principio de inducción, tan caro a los matemáticos, sea falso. Lo único que significa es que es un principio extralógico. Es decir, que la lógica aristotélica no es suficiente para fundar la Matemática, y que ésta acepta, en consecuencia, verdades y tipos de raciocinio que no son puramente lógicos. Esta es la observación de Poincaré. Reconozcamos su justeza; pero reconozcamos también que Poincaré es algo exclusivista a este respecto: existen, sin duda, otros procesos matemáticos extra-lógicos, y que son irreductibles al principio de inducción completa.

Esta necesidad de ampliar la Lógica es hoy reconocida universalmente. Es la obra que los matemáticos han aportado a esta rama de la Filosofía. Toda esta contribución toma su forma definitiva con Russell-Whitehead y posteriormente con Hilbert, quienes consi-

deran a la lógica formal compuesta de tres partes: lógica de las proposiciones, lógica de las clases y lógica de las relaciones. El monumento de esta tendencia logicista de la Matemática es la famosa obra de Russell sobre los principios de la Matemática. En el primer volumen comienza Russell sentando su ya aludida definición de las Matemáticas como «la clase de las proposiciones *p implica q*...»; y manifiesta que el propósito del libro es justamente el de probar que tal definición es correcta y responde a la realidad. Este volumen está destinado a los no-matemáticos, y debía ser seguido por otro más técnico. Pero este segundo tomo, escrito en colaboración con Whitehead, adquirió tal desarrollo que se transformó a su vez en tres grandes volúmenes, que constituyen los «Principia Mathematica», justamente célebres por su profundidad y contenido. No es esta obra accesible al profano, no sólo por su tecnicismo, sino también porque en ella utilizan los autores, para librarse de los no pocos errores lógicos que el lenguaje común nos hace cometer y que se introducen subrepticiamente en los razonamientos, un lenguaje especial, a base de símbolos gráficos, cada uno de los cuales representa un concepto bien preciso, fijo e inalterable, y entre ellos están sometidos a reglas también fijas, análogas a las algebraicas. Este es el sistema de la Lógica simbólica, que ha recibido también otros nombres (incluso el impropio de Lógica matemática) y que realiza una idea muy antigua, debida a Leibnitz. Según éste, debía ser posible inventar un sistema tal de símbolos, que mediante ellos pudiera expresarse con toda exactitud un pensamiento cualquiera, y de tal modo que los razonamientos estuvieran representados por transformaciones algebraicas de ciertas fórmulas que representarían las premisas, a otras que representarían las conclusiones. Alrededor de esta tentadora idea han trabajado, después de Leibnitz, De Morgan, Boole, Schroeder, etc., pero recién con Russell y Whitehead la lógica simbólica toma un aspecto más o menos definitivo, aunque posteriormente es aún perfeccionada por la escuela de Peano y Burali-Forti, y luego por la de Hilbert, pero ya con otro objeto. Ultimamente se ha vuelto un poco a los puntos de vista de Boole, existiendo interesantes trabajos sobre el tema por el gran Marshall Stone (que nos visitó hace poco), Tarski y otros.

Sin proponérnoslo, acabamos de delinear el logicismo, una de las escuelas matemáticas actuales, cuya tesis principal consiste en

que la Matemática no es sino una parte o rama de la Lógica, y más precisamente, de la Lógica formal; entendida ésta en la latitud que le atribuímos modernamente.

Además del logicismo, otras dos tendencias disputan hoy tenazmente para imponer sus puntos de vista: el formalismo y el intuicionismo (neointuicionismo, según algunos). Comentaremos brevemente estas dos escuelas.

La primera, fundada y desarrollada por David Hilbert y sus discípulos, pretende formalizar (de ahí su nombre) todas las Matemáticas. Una teoría matemática, según Hilbert, parte de un grupo de *axiomas,* que ligan entre sí a ciertos conceptos *primitivos* e indefinibles, y además, de un grupo de reglas de deducción y demostración. Estas últimas permiten, combinando adecuadamente los axiomas, deducir otras proposiciones o *teoremas,* de los cuales (y de los axiomas) se deducen a su vez otros teoremas, y así sucesivamente. Una teoría así planteada se dice haber sido formalizada o axiomatizada. Salta a la vista el más conocido ejemplo de una teoría axiomática: el de la Geometría de Euclides. De hecho, la magna obra de Euclides, los « Elementos », puede decirse que son la primera tentativa de axiomatización de la geometría plana y del espacio, veintitrés siglos antes de que Hilbert nos hablara de tales cuestiones. Uno de los primeros axiomas geométricos es aquel de que « por dos puntos (distintos) pasa siempre una recta, y nada más que una », y da lugar de inmediato, aplicando las reglas de deducción y demostración, al teorema: « dos rectas distintas no pueden cortarse en más de un punto ». En este ejemplo, « punto », « recta », « pasar » (una recta por un punto), « cortarse » (dos rectas) son conceptos primitivos (que no se definen). El axioma da una relación entre los tres primeros, mientras que el teorema da una relación entre los dos primeros y el último. La demostración se apoya solamente en las reglas de la Lógica.

La única condición realmente vital que deben cumplir los axiomas de una teoría es la de *compatibilidad;* es decir, que entre sí no sean contradictorios, ni que puedan deducirse de ellos dos proposiciones contradictorias. Esta condición es verdaderamente fundamental, porque de dos proposiciones contradictorias una es necesariamente falsa (principio de contradicción de la Lógica), y de una proposición falsa puede obtenerse cualquier conclusión, sea verdadera o falsa.

Es imprescindible, pues, so pena de caer en el absurdo, que el sistema de axiomas sea compatible. ¿Y cómo comprobamos esta compatibilad? La serie de los teoremas de una teoría puede ser enormemente numerosa; y entonces, ¿qué garantía tenemos de que alguno de ellos, en un futuro remoto, no será contradictorio con uno de los anteriores, o con un axioma? Ignoro cuántos teoremas de la geometría elemental habránse demostrado desde Euclides a la fecha; supongamos, para poner una cifra, que sean un millón. Pues bien: el teorema número 1.000.001, o aún más dubitativamente, el teorema número 2.000.000, ¿no resultará contradictorio con nuestra hermosa y bien lograda geometría euclidiana? Aquí interviene lo que Hilbert llama la *metateoría,* que es la encargada de probar la compatibilidad de los axiomas de la teoría; y la *Metamatemática,* cuya difícil misión es la de probar la compatibilidad de la Matemática. Y tocamos aquí justamente el punto vulnerable de este Sigfrido que es el formalismo, y que no ha podido ser sustraído a las potentes lanzas que lo acosan. La compatibilidad de todas las ramas de la Matemática ha podido ser demostrada, admitiendo la de la Aritmética; pero la de ésta ha resistido todos los esfuerzos imaginables, y los últimos resultados en este sentido, especialmente los de Gödel, parecen hacernos perder la última esperanza.

Dejemos planteado aquí este tremendo interrogante, de si toda nuestra Matemática, después de treinta siglos de labor ardua y constante, se nos derrumbará ahora como un castillo de naipes, y pasemos a una rápida revista de la tercera escuela, del intuicionismo.

El paladín del intuicionismo es un gran matemático holandés llamado Brouwer. Su posición se caracteriza principalmente por exigir una revisión de los primeros principios de la Lógica, particularmente el llamado del tercero excluído, que nos dice que de dos proposiciones contradictorias, una al menos debe ser verdadera: una cosa debe necesariamente ser o no ser; una figura geométrica, por ejemplo, o es un círculo o no es un círculo; un tercer caso queda excluído, no puede presentarse. Pues bien: Brouwer observa que hay proposiciones en la Matemática de las que no puede decirse ni que son verdaderas ni que son falsas. Consideremos, para dar un ejemplo burdo (que tal vez no admitiría el propio Brouwer) la siguiente proposición: « la cifra decimal que ocupa el lugar 800 en

el desarrollo del número π es un 3». Como el número π, ese misterioso ente que nos enseñaron ya en la escuela y que tantas cualidades preciosas tiene para el matemático, no ha sido calculado más que con 707 cifras decimales (por un calculador bien paciente, sin duda), nos es imposible decir por el momento si la cifra número 800 es o no es un 3. Así, no podemos afirmar ni negar aquella proposición, al menos mientras no calculemos efectivamente la cifra. En general, cuando decimos «existe un número (u otro ente cualquiera) que goza de tal propiedad», Brouwer exige que se precise el significado de la palabra «existe». Para los logicistas y formalistas, un ente matemático existe, cuando su definición no implica contradicción; es decir, que ambos se apoyan aquí en el principio de razón suficiente, al sentar que un ente existe, cuando no hay razón formal para que no exista. En cambio, Brouwer, dice que un ente existe, cuando se da una construcción, al menos ideal (¡y volvemos a la idea de Carlos Peirce!) que permite obtenerlo.

Como consecuencia de esta posición, Brouwer rechaza el procedimiento de demostración *ab absurdo,* tan común en la Matemática, y que consiste, como se sabe, en suponer que lo que se desea demostrar es falso, para obtener de allí una contradicción; es decir, en suma, probar que la proposición contradictoria de la que interesa es falsa. Por el principio del tercero excluído se deduce entonces la tesis que interesa. Dada la anatema que Brouwer formula contra tal principio, es natural que en su lógica, la falsedad de la proposición contradictoria no prueba la verdad de la que interesa.

Se pierde así una potente herramienta de trabajo, usada confiadamente desde Euclides por todos los que se ocupan de esta noble ciencia. Al mismo tiempo, se ve la necesidad de reconstruir paso a paso toda la Matemática, o al menos revisarla prolijamente, para despojarla de todas las objecciones que le formula Brouwer. Sin embargo, a uno le queda la impresión de que la crisis que plantea el intuicionismo no es tan grave como aparenta, y que podrá llegarse a una suerte de compromiso entre la lógica intuicionista y la clásica, que no sea desdoroso para ninguna.

El intuicionismo puede encararse desde otro punto de vista que sugiere consideraciones interesantes. La lógica aristotélica, y aún la ampliada por obra de los logicistas, es *bivalente,* en el sentido de que una proposición cualquiera sólo es susceptible de dos «valores de verdad»: puede ser verdadera, o falsa. En cambio en la lógica

intuicionista puede caber, como hemos visto, un tercer « estado », en que la proposición no sea ni verdadera ni falsa. Diremos entonces que la lógica brouweriana es *trivalente*; en ella no vale el principio del tercero excluído, sino el del cuarto excluído. Pueden imaginarse, y efectivamente se han imaginado y desarrollado, otras lógicas *polivalentes,* en las cuales de lo verdadero a lo falso hay varias gradaciones, y si n es el número de éstas, valdrá un « principio del $(n+1)$-ésimo excluído ». Y aún se ha ido más lejos: Reichenbach introduce su lógica probabilística, en la cual a cada proposición se asocia una cierta probabilidad de que sea verdadera. Como estas probabilidades se miden numéricamente, variando con continuidad desde cero hasta uno (correspondiendo el cero a la falsedad y el uno a la verdad) resulta que también los « valores de verdad » son infinitos y varían con continuidad. Esta lógica probabilística estudia la manera de combinar las probabilidades de dos o más proposiciones para obtener la probabilidad de otras.

En todo lo que estamos exponiendo, existe un diablillo escondido, que a poco que pensemos asomará para darnos un disgusto: es el infinito que, como muy bien lo ha observado uno de nuestros insignes maestros, el Prof. J. Babini (1), resurge cada vez que se lo ha creído dominado y sometido a control, y produce una nueva evolución de la Matemática. Babini considera, y no sin razón, que la historia de los avances de nuestra ciencia es la historia de sus victorias, aparentes al menos, sobre el infinito.

Apresurémonos a declarar que, cuando el matemático habla del infinito, ya sea potencial o actual, entiende referirse a algo muy distinto del infinito de que hablan los filósofos. El infinito es una de aquellas palabras homónimas a que antes me he referido, que necesitan de un intérprete adecuado para su traducción del lenguaje matemático al filosófico y viceversa. Justamente alrededor del infinito es donde se han planteado muchas discusiones que nunca debieron llegar a mayores, por falta de comprensión de los términos. Para el matemático, el infinito no es más que una palabra, cómoda para designar ciertas cosas. Porque tampoco es palabra unívoca, sino que aún dentro de la Matemática tiene varios significados afines. Cuando decimos por ejemplo: « La sucesión de los números naturales es infinita », queremos significar simplemente esto:

(1) J. Babini, Zenón de Eleas y el Obispo Berkeley, Santa Fe, 1935.

« después de cada número natural hay otro ». Esto, que fué adoptado por Peano y otros como uno de los axiomas para los números, hace desaparecer toda ambigüedad de la frase anterior, y constituye una de esas victorias a que recién nos referíamos; pero el haberla ganado ha costado a los matemáticos muchos sinsabores. En el mismo sentido potencial, o en potencia, está tomada la palabra cuando decimos que en una recta hay infinitos puntos, y en general, en todas aquellas frases en que se haga mención de algo que se presente en forma seriada. Hay ocasiones en que el infinito está latente en forma más oculta y solapada, y por consiguiente más peligrosa. Así, la primera vez que apareció en la historia, al menos conscientemente, es en el simpático teorema de Pitágoras, conocido de todos ustedes, aquel que relaciona los cuadrados construídos sobre los catetos y sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo. O, si se prefiere ponerlo en lenguaje moderno, en el problema que plantean los números *irracionales*. Para la mentalidad griega, un número no era sino la expresión de una medida efectivamente realizable, y así, dado un segmento, por ejemplo, cualquier otro debía tener con aquel una común medida; debería existir un tercer segmento del cual ambos fueran múltiplos, para que el segundo tuviera derecho a ser considerado como « segmento ». Pero he aquí que, a consecuencia del teorema de Pitágoras, el lado y la diagonal de un cuadrado resultan inconmensurables, es decir, carecen de una medida común. Si uno de ellos se considera como un segmento, el otro no lo es, es algo inexpresable, *álogos*. Semejante fenómeno, inconcebible dentro de la filosofía de la época, pero no por eso menos cierto, provocó, según nos transmite Proclo, la desgracia del primero que se atrevió a revelar a oídos profanos lo que debió quedar para siempre en el secreto: dicho personaje pereció, efectivamente, en un naufragio, sin duda a consecuencia de las iras del Olimpo. « Y esto ocurrió (añade Proclo) porque lo inexpresable y lo inimaginable debía haber permanecido en el misterio. Por esta razón, el malhechor que tocó y reveló esa imagen de lo viviente, fué relegado al mismo lugar del surgimiento y allí será bañado eternamente por las olas ». Este « inexpresable e inimaginable » no es sino el diablillo del infinito, que asoma aquí en la aparentemente contradictoria posibilidad de dividir indefinidamente una magnitud.

Precisamente esta divisibilidad infinita fué aprovechada muy há-

bilmente por los filósofos de la escuela de Eleas, especialmente por Parménides y su discípulo Zenón, en sus célebres argumentos, tales como el de Aquiles y la tortuga y análogos, para negar la posibilidad del movimiento y apoyar así su filosofía del ser absoluto, inmutable y eterno.

Esta primera batalla contra el infinito, bajo la forma de las magnitudes inconmensurables o números irracionales, fué ganada cuando Eudoxo de Cnido, y posteriormente el gran Euclides, fundan una teoría de las proporciones lógicamente impecable que elimina, digámoslo así, la necesidad de pensar en la divisibilidad infinita: el fantasma ha quedado sometido así a un estado potencial en el que, agazapado, espera la ocasión de acometer nuevamente.

El método de exhaución, ya en germen en esta obra, y utilizado luego ampliamente por Arquímedes, es el que, mucho más tarde, en el siglo XVII, evolucionará por obra de Wallis y Newton, y por otra parte Leibnitz, para dar origen a la « teoría de las fluxiones » o cálculo infinitesimal, cuyo nombre mismo indica ya el desarrollo exitoso de otra batalla de la misma índole. El infinito se presenta aquí nuevamente como infinitamente pequeño, bajo la forma de los aumentos o disminuciones insensibles (las « fluxiones » de Newton) que pueden experimentar las magnitudes. Hoy se sabe que es posible manejar tales variaciones sin necesidad de nada metafísico, ignorando los infinitésimos, reemplazando este concepto, no matemático, por el de una aproximación que puede llevarse tan lejos como se requiera. Esta evolución de las ideas, provocada por la crítica a los conceptos infinitesimales, es la obra de los matemáticos del siglo pasado, los grandes constructores del actual Análisis matemático, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, etc.

Los conceptos de infinito en potencia y en acto han dejado casi de tener importancia en la Matemática, después de Jorge Cantor, el fundador de la teoría de los conjuntos; o mejor dicho, se los encara hoy de manera diferente. El infinito potencial es el que hoy se llama *numerable,* perfectamente manejable, y que se reduce a que después de cada entero hay otro. Son los conjuntos infinitos no numerables los que dan lugar a los problemas más difíciles, y aún a las antinomias, al punto que podemos decir que hoy nos hallamos en pleno fragor de la tercer batalla contra el espectro. La noción misma de conjunto, fundamental de la teoría de Cantor, necesita ser revisada. El concepto de « totalidad » debe ser muy bien pre-

cisados si queremos vernos libres de paradojas y absurdos. «*Toda* frase en que entre la palabra *todos* — dice el ilustre Profesor Francisco Vera (1) — hay que usarla con precaución. Si suponemos, por ejemplo, que en una aldea sólo hay un barbero y que este único barbero afeita a *todos* los hombres de la aldea que no se afeitan a sí mismos, salta la paradoja en cuanto se haga esta ingenua pregunta: ¿se afeita el barbero a sí mismo?».

Esta es una de las formas, tal vez de las más accesibles, que puede adoptar la paradoja conocida bajo el nombre de Russell. Otras no menos notables se han presentado, pero son de un carácter más técnico: la paradoja de Richard nos hace dudar de las propiedades y hasta de la existencia de los números irracionales, retrotrayéndonos así a las concepciones pitagóricas, o mejor, apolíneas, para usar el adjetivo que puso de moda Spengler. Con otra paradoja todavía más abstrusa, la de Burali-Forti, que se refiere a los tipos de ordenación de los conjuntos, forman la triple muralla contra la cual se estrellan hasta ahora los más esforzados paladines de la Matemática.

El mismo Bertrand Russell ha pretendido escapar de estas antinomias, ideando para ello su teoría de los *tipos*. Sostiene que los elementos y los conjuntos son a manera de inquilinos de una casa de varios pisos, de tal modo que los habitantes de cada piso guardan muy buenas relaciones entre sí, pero las complicaciones peligrosas aparecen cuando tratamos de relacionar los de un piso con otro; hay una manifiesta resistencia de cada uno a participar del modus vivendi de los individuos de otro clan. Demás está decir que este remiendo tan poco convincente a la teoría de los conjuntos no ha tenido mayor éxito, y el mismo Russell se ha visto obligado a imponer a su teoría ciertas restricciones que la hacen aún menos satisfactoria.

Hemos llegado así a plantear el panorama de la actual crisis de la Matemática; a quienes, con sublime paciencia, me han escuchado hasta aquí, he procurado presentarles lo esencial de las diversas tendencias en pugna: el logicismo de Russell, Whitehead y Peano, hoy algo olvidado; el formalismo de Hilbert y su escuela, y su aparente fracaso según los teoremas de Gödel; el intuicionismo de Brouwer, Heyting y Beppo Levi; son las principales escuelas filosófico-matemáticas de la actualidad. Pero aparentemente, cada uno

(1) F. VERA, Puntos críticos de la matemática contemporánea. Losada, 1944.

de estos sistemas tiene su talón de Aquiles: el logicismo, la necesidad de ampliar ilógicamente la Lógica; el formalismo, con el tremendo problema de la compatibilidad de los axiomas (reducida a los de la Aritmética), hasta hoy irresoluble; el intuicionismo, a quien tocaría, para ser consistente, reconstruir toda la Matemática sin el principio del tercero excluído. Aparecen paradojas por todas partes, se acumulan y parecen ahogarnos y sumirnos en un mar de confusión.

Ni el mismo lenguaje ha escapado a los embates del prurito lógico: existe (o existía; pues es más prudente hablar en pasado) la llamada escuela de Viena, capitaneada por Carnap y Schlick, que aplica las conquistas lógico-matemáticas para emprender un fatigoso análisis del lenguaje, pretendiendo fundar un lenguaje científico exento de contradicciones o de supuestos subrepticios, cada una de cuyas frases, para ser considerada verdadera, pueda ser sometida al control de la experiencia, en un sentido bien preciso y determinado. No hay duda que tal análisis aportará sus beneficios, tal vez en regiones inesperadas, pero el sistema tiene una limitación esencial desde su origen: la que imponen los autores al discurso a fin de que éste pueda ser considerado como expresión de « verdad científica » de acuedo con su concepto. No es extraño por ejemplo, que Carnap diga que la Metafísica no es una ciencia: ha renunciado de antemano a considerar como tales a aquellas disciplinas cuyas verdades no puedan pesarse, medirse y fotografiarse.

Mientras tales tormentas truenan amenazadoras y se desarrolla tan grandiosa lucha, se sigue trabajando en los ubérrimos y siempre variados campos de nuestra noble ciencia. Hay siempre en las eras alguna mies que recoger, o alguna nueva piedra que colocar al imponente edificio, para los jóvenes especialmente, que no se ocupan de semejantes « cosas de viejos ». El obrero de los últimos pisos no se ocupa de los cimientos, convencido de que estos son sólidos y, puesto que han resistido embates milenarios de todas suertes, deben seguir resistiendo todavía. Hay intuición de que lo ganado no se perderá y que de un modo u otro la Matemática saldrá airosa, en un futuro tal vez próximo, unificada acaso en unas pocas, tal vez una sola, rama fundamental, más vigorosa que antes.

Es que, en definitiva, no es sino una de las expresiones del pensamiento humano, una de las más altas y puras. Junto con la Filosofía, la Música y la Poesía, no fenecerá mientras haya un hombre que piense y sienta. Subsistirá así hasta la consumación de los siglos.